Mat-Inf 1100 7/10

Approksimasjonsfeil Taylor-polynom

Taylor-polynomet til $f(x)$ av grad n om punktet a er (entydige polynomet av grad $\leq n$) gitt ved

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Hvor stort er restleddet under?

$$R_n f(x) := f(x) - T_n f(x) \qquad (1)$$

Merk: $f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$.

Teorem Anta $f, f', \dots, f^{(n+1)}$ er kontinuerlig på intervallet $[a,x]$ (eller $[x,a]$ om $x<a$). Da er

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt \quad (2)$$

Bevis ved induksjon på $R_k f(x)$
$k = 0, \dots, n$.

$\underline{k=0}$

$$R_0 f(x) \overset{(1)}{=} f(x) - T_0 f(x)$$
$$= f(x) - f(a)$$
$$= \int_a^x f'(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{0!}\int_a^x f^{(0+1)}(t)\,(x-t)^0\,dt.$$

Sant for $k=0$.

Anta (2) holder for $k \geq 0$. Dvs

$$R_k f(x) = \frac{1}{k}\int_a^x f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^k\,dt$$

Delvis integrasjon gir

$$R_k f(x) = \int_a^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \left(-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right)' dt$$

$$= \underbrace{-\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\right]_a^x}_{= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}} + \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\, dt \qquad (3)$$

Siden

$$T_{k+1} f(x) = T_k f(x) + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1},$$

så får vi

$$R_{k+1} f(x) = f(x) - T_{k+1} f(x)$$

$$= \underbrace{f(x) - T_k f(x)}_{= R_k f(x)} - \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

$$\overset{(3)}{=} \int_a^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1}\, dt.$$

$\blacksquare$

For å få et feilestimat begrenser vi $|R_n f(x)|$ ovenfra.

<u>Korollar</u> Anta $f, f', \ldots, f^{(n+1)}$ er kontinuerlige på intervallet $[a,x]$ (eller $[x,a]$ om $x<a$) og la $M = \max_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Da er $|R_n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$ (4)

<u>Bevis</u> for $x>a$ (samme argument for $x<a$).

Observer først at følgende holder for enhver $g(t)$:

$$\int_a^x -|g(t)|\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt \leq \int_a^x |g(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |g(t)|\,dt \quad (5)$$

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{n!} \left| \int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n}_{g(t)}\,dt \right|$$

$$\overset{(5)}{\leq} \frac{1}{n!} \int_a^x \underbrace{|f^{(n+1)}(t)|}_{\leq M} (x-t)^n\,dt$$

$$\leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

$\blacksquare$

Eksempel

Finn en $n \geq 0$ slik at

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-3}$$

for $f(x) = \sin(x)$ og $a = 0$.

Siden $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, ...

vet vi at $\max_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)| \leq \underbrace{1}_{M} \quad \forall n \geq 0$.

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} |R_n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

for $x \in [0,1]$

Søker n slik at

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3} \Rightarrow (n+1)! > 1000$$

$$\Rightarrow n = 6 \quad \left(\text{siden } 6! = 720 \text{ \& } 7! = 5040.\right)$$

Konklusjon:

$$\Big|\sin(x) - \overbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}^{T_6 \sin(x)}\Big| < 10^{-3} \text{ for alle } x \in [0,1].$$

Lagranges restleddsformel

Om $f, \dots, f^{(n+1)}$ er kontinuerlig deriverte på $[a,x]$ (eller $[x,a]$ om $x<a$), så finnes det en $c \in (a,x)$ slik at

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (6)$$

Bevis. for $x>a$.

La $m := \min_{t\in[a,x]} f^{(n+1)}(t)$ & $M := \max_{t\in[a,x]} f^{(n+1)}(t)$.

Da er

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\leq M}(x-t)^n\,dt \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

og $R_n f(x) \geq \frac{m}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

$\Rightarrow$ det finnes en $d \in [m, M]$

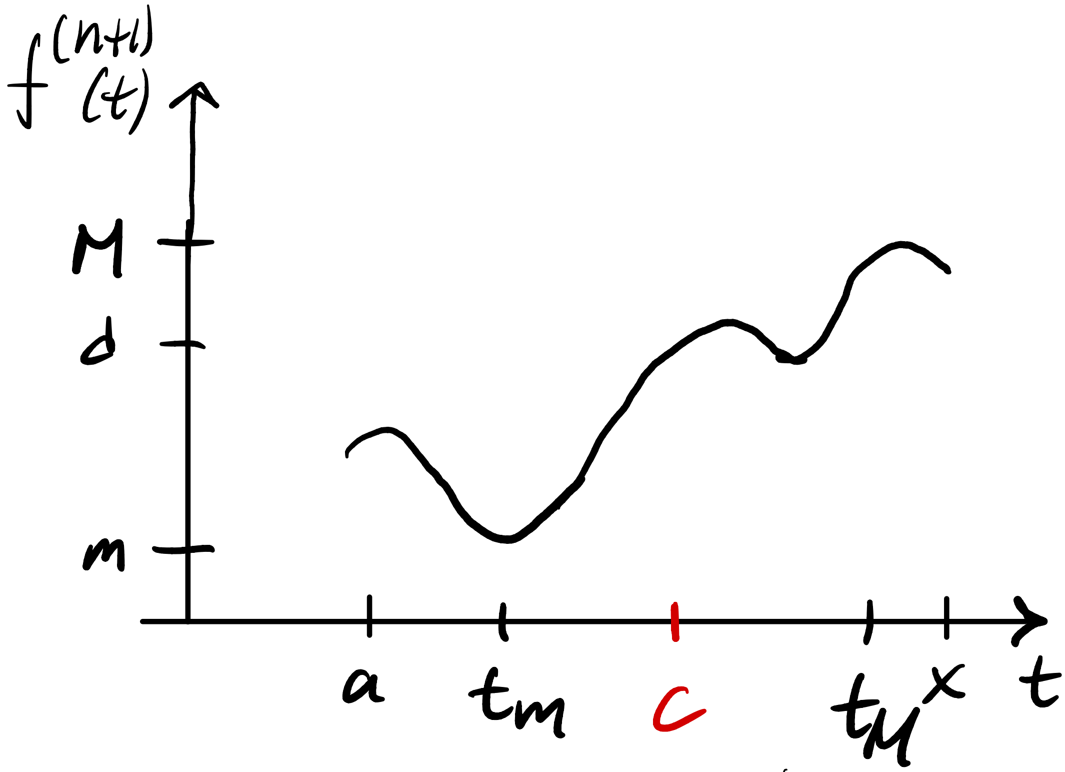
slik at $R_n f(x) = \frac{d}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (7)

Siden

$$f(t_m) = m \quad \& \quad f(t_M) = M$$

for noen $t_m, t_M \in [a, x]$ og $f^{(n+1)}$ er kontinuerlig, finnes det minst ett $c \in [a, x]$ slik at

$$f^{(n+1)}(c) = d.$$



Resultatet følger av (7) $\boxtimes$

Eksempel Finn en $n \geq 0$ slik at

$|f(x) - T_n f(x)| < 10^{-4}$ for alle $x \in [0,1]$

når $f(x) = e^x$ og $a = 0$.

Vet at $f^{(n+1)}(x) = e^x$ for alle $n \geq 0$

og

$$|R_n f(x)| \overset{(6)}{=} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$\overset{c \in [0,1]}{\leq} \frac{e^1}{(n+1)!}$$

Søker $n \geq 0$ s.a.

$$\frac{e^1}{(n+1)!} < 10^{-4} \Rightarrow (n+1)! > 10^4 \cdot e^1$$

$$\Rightarrow n = 7 \quad \left(\text{siden } 7! = 5040 \;\&\; 8! = 40320 \right).$$