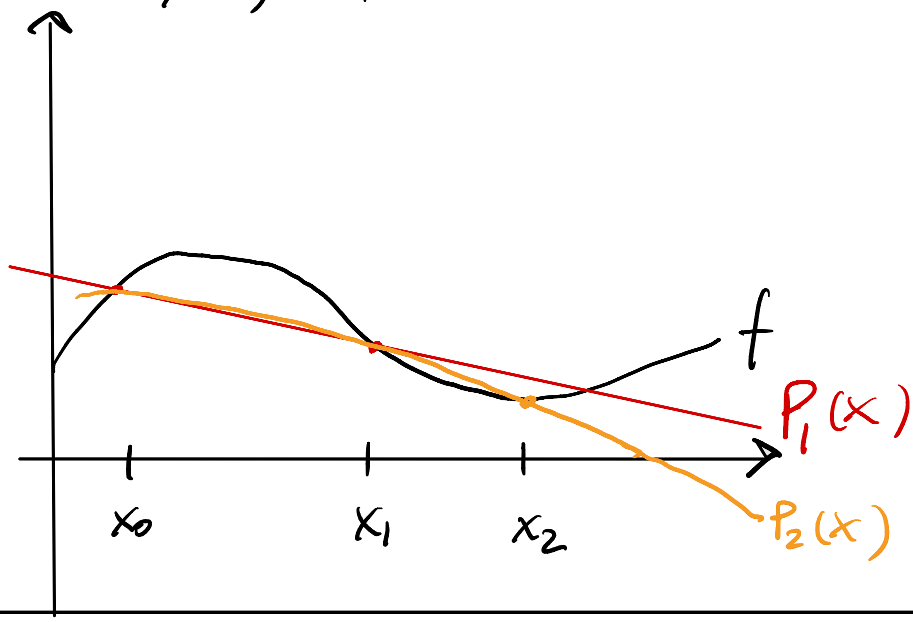
Mat-Inf 1100 — 17/10

# Polynominterpolasjon

Ønsker å finne polynom $P_n(x)$
slik at $P_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n$
hvor $x_0, x_1, \dots, x_n$ er distinkte punkter. (1)




**Motivasjon:**

- Mer ikke-lokal approks enn Taylor-polynom
- Kan brukes når man kun kjenner verdien til $f$ i noen punkter $x_0, x_1, \dots, x_n$

Problemet (1) kan skrives: Finn

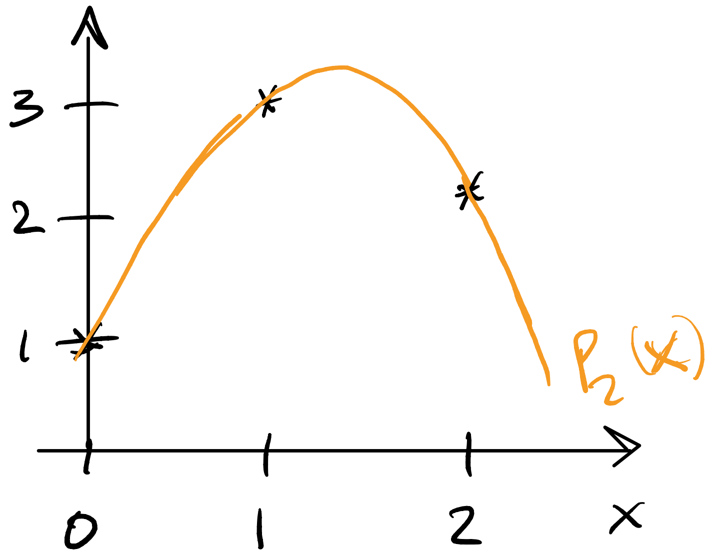
$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

slik at $P_n(x_i) = f(x_i) \quad i=0,1,\dots,n.$

$n+1$ likninger og $n+1$ ukjente $c_0, c_1, \dots$

**Eksempel** Finn $P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ (2)

slik at $P_2(0) = 1$, $P_2(1) = 3$, $P_2(2) = 2$. (3)




**Likningssystem:**

$$\left.\begin{aligned} P_2(0) &\overset{(2)}{=} c_0 \overset{(3)}{=} 1 \\ P_2(1) &\overset{(2)}{=} c_0 + c_1 + c_2 \overset{(3)}{=} 3 \\ P_2(2) &\overset{(2)}{=} c_0 + 2c_1 + 4c_2 \overset{(3)}{=} 2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$c_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_2 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{7}{2}, \quad c_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Likningssystemet (4) forenkles ved å representere $P_2(x)$ på Newton-form:

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) \qquad (5)$$

Gir nedre triangulær likningssystem

$$c_0 \overset{(5)}{=} P_2(0) \overset{(3)}{=} 1 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$c_0 + c_1 = P_2(1) = 3 \Rightarrow c_1 = 2$$

$$\underbrace{c_0 + 2c_1 + 2c_2 = P_2(2) = 2}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 = \frac{2 - c_0 - 2c_1}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1)$$

$$= 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Representasjonene (2) & (5) av $P_2$ gir samme løsning.

Generelt er Newton-formen til de distinkte punktene $x_0, \ldots, x_n$ gitt ved

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (6)$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j).$$

Betingelsene

$$P_n(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

leder til et (nedre triangulert) likn. system hvor man kan bestemme $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sekvensielt som følger:

1. $$P_n(x_0) \overset{(6)}{=} c_0 \overset{(7)}{=} f(x_0)$$

2. Finn $c_1$:

$$P_n(x_1) \overset{(6)}{=} c_0 + c_1(x_1 - x_0) \overset{(7)}{=} f(x_1)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{f(x_1) - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Notasjon $c_1 = [x_0, x_1]f := \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (8)

3. Finn $c_2$:

$$P_n(x_2) \overset{(6)}{=} c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\overset{(7)}{=} f(x_2)$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{f(x_2) - \left(c_0 + c_1(x_2 - x_0)\right)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (9)$$

## Metode 1

Generelt får man

$c_0 = f(x_0)$ og

$$c_k = \frac{f(x_k) - \left(c_0 + c_1(x_k - x_0) + \cdots + c_{k-1}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})\right)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)}$$

$$= \frac{f(x_k) - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \prod_{j=0}^{i}(x_k - x_j)}{\prod_{j=0}^{k-1}(x_k - x_j)} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

## Metode 2

Verdiene til $c_0$ og $c_1$ i (9) gir

$$C_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{\pm x_1}}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$= \frac{[x_1,x_2]f - [x_0,x_1]f}{x_2-x_0} =: [x_0,x_1,x_2]f.$$

Dette generaliserer til metode 2:

$c_0 = f(x_0)$ og

$c_k = [x_0, x_1, \ldots, x_k]f$, $k = 1, 2, \ldots n$,

hvor

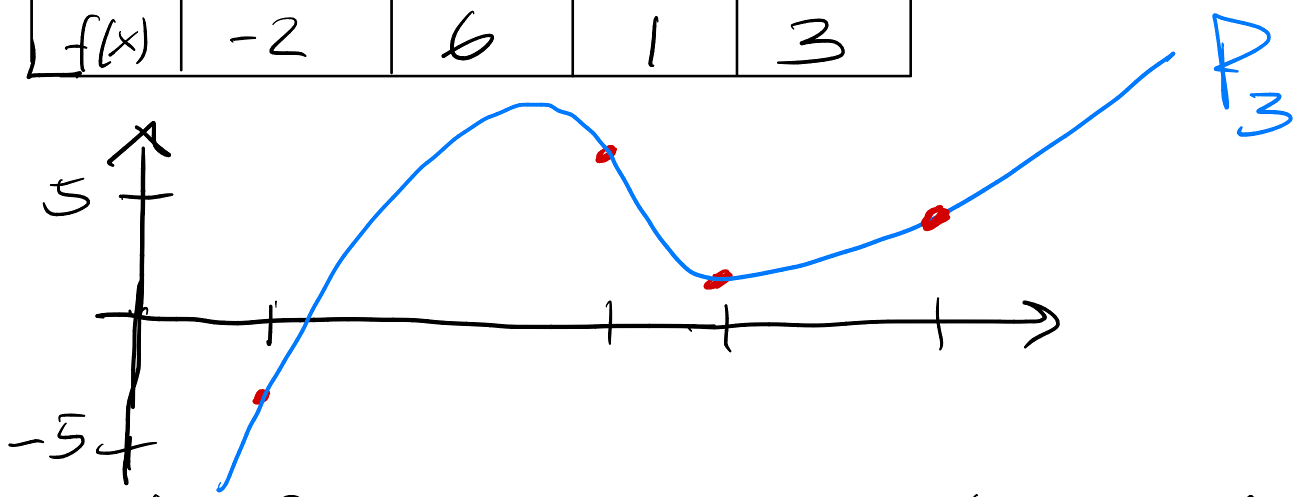
$$[x_0,x_1,\ldots,x_k]f := \frac{[x_1,\ldots,x_k]f - [x_0,\ldots,x_{k-1}]f}{x_k - x_0}$$

Kalles den dividerte differansen til $f$ av orden $k$ i punktene $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

## Eksempel

Finn polynomet som går gjennom punktene

| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-5$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
| $f(x)$ | $-2$ | $6$ | $1$ | $3$ |




Newtonform: $P_3(x) = c_0 + c_1(x+5) + c_2(x+5)(x+1) + c_3(x+5)(x+1)x$

der

$$c_0 = f(x_0) = -2$$

Metode 2:

| $x$ | $f(x)$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $-5$ | $-2$ | | | |
| | | $[-5,-1]f = 2$ | | |
| $-1$ | $6$ | | $[-5,-1,0]f = \frac{-7}{5}$ | |
| | | $[-1,0]f = -5$ | | $[-5,-1,0,2]f = \frac{17}{35}$ |
| $0$ | $1$ | | $[-1,0,2]f = 2$ | |
| | | $[0,2]f = 1$ | | |
| $2$ | $3$ | | | |

Løsning:

$$P_3(x) = -2 + 2(x+5) - \frac{7}{5}(x+5)(x+1) + \frac{17}{35}(x+5)(x+1)x$$

# Alternativ metode

Lagrange interpolasjon for $n=2$:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

(Generaliserer til enhver $n \geq 0$.)

Fordel med Newtoninterpolasjon:
om man legger til nytt interpolasjons-punkt $(x_{n+1}, y_{n+1})$ så "arver" $P_{n+1}$ koeffisientene $c_0, \dots, c_n$ fra $P_n$ <u>uendret</u>.

Skal senere bruke polynom $P_n(x) \approx f(x)$ til å approksimere deriverte og integralet til $f$:

$$f'(x) \approx P_n'(x) \quad \text{og} \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_n(x)\,dx$$

(Vil se at feilen relaterer til $n$.)