2. oktober 2022

MAT-INF 1100

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 20. oktober 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Skannede ark må være godt lesbare. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Husk å inkludere eventuell kode og kjøreeksempel, samt relevante plott og figurer i PDF-filen.

Merk at man har kun ett forsøk på oppgaven. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan du bli bedt om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) før innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For å få godkjent denne obligatoriske oppgaven må du ha gjort seriøse forsøk på å løse alle deloppgavene, og minst halvparten av oppgavene må være tilfredsstillende besvart.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgaver

Oppgave 1. I denne oppgave skal vi studere funksjonen

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x)\,.$$

a) Finn Taylorpolynomet av orden 3 til f om punktet $a = 0$.
Løsning: Produktregelen for derivasjon gir oss

$$f'(x) = \ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + 1,$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{og} \quad f^{(3)}(x) = -(1+x)^{-2}$$

Dermed får vi

$$T_2 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{((0)}}{3!}x^3 = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

b) Vis ved induksjon at for alle $k \geq 2$ så er

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (k-2)!(1+x)^{1-k}.$$

Bestem Taylorpolynomet $T_n f(x)$ til f om punktet $a = 0$ og et uttrykk for restleddet $R_n f(x)$.
Løsning: Anta at påstanden holder for en $k \geq 2$ (vi har vist i forrige oppgave at den holder for $k = 2$ og $k = 3$). Da har vi at

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) &= (-1)^k (k-2)!(1-k)(1+x)^{1-(k+1)} \\ &= (-1)^{k+1}((k+1)-2)!(1-x)^{1-(k+1)}, \end{aligned}$$

og resultatet følger ved induksjon.
Dermed har vi at $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ og

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-2)! \quad k \geq 2,$$

som gir (for $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} T_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k (k-2)!}{k!} x^k \\ &= x + \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k(k-1)} x^k. \end{aligned}$$

c) Finn et naturlig tall N slik at

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-4} \quad \text{for alle} \quad n \geq N.$$

Ved hjelp av restleddsformelen finnes det en en $c \in (0, x)$ slik at

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Og fra forrige oppgave vet vi at for alle $c > 0$ og $n \geq 0$, så er

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq (n-1)!$$

Det impliserer at

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n f(x)| = \max_{x \in [0,1]} |R_n f(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

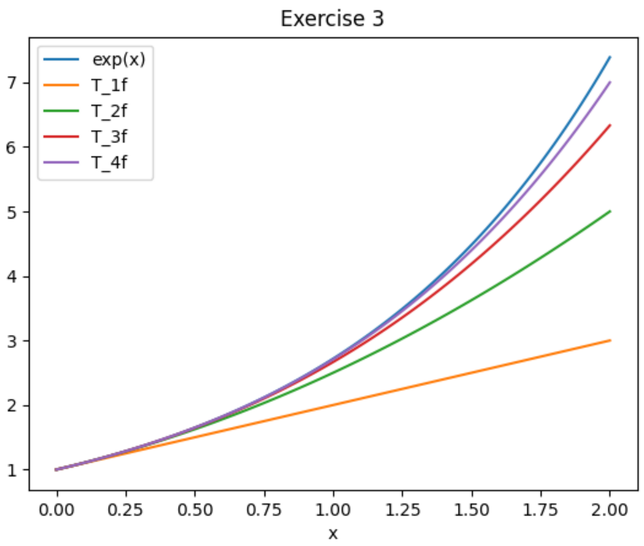
Vi søker minste $N \geq 0$ slik at

$$\frac{1}{N(N+1)} < 10^{-4} \implies N(N+1) > 10^4 \implies N = 100.$$

Oppgave 2. Lag et program som plotter grafene til funksjonen $f(x) = \exp(x)$ og Taylorpolynomet $T_n f(x)$ om punktet $a = 0$ for $n = 1, 2, 3, 4$ over intervallet $[0, 2]$.

Løsning: $T_n e^x = 1 + x + \cdots + \frac{1}{n!} x^n$ er plottet i koden under.

```
# importing the required module
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# x axis values
x = np.linspace(0,2,100)
f = np.exp(x)
plt.plot(x,f)

# Derivatives f^{(k)}(0) of f(x) = exp(x) to order 5
f_k = [1,1,1,1,1]

# computing T_0 f
T_nf = f_k[0]*np.power(x,0)

for n in range(1,5):
    #computing and plotting T_n f = T_{n-1}f + (f^{(n)}(0)/n!) x^n
    T_nf = T_nf + (f_k[n]/math.factorial(n))*np.power(x,n)
    plt.plot(x,T_nf)

# naming the x axis
plt.xlabel('x')
# naming the y axis

# giving a title to my graph
plt.title('Exercise 3')
plt.legend(['exp(x)','T_1f','T_2f', 'T_3f', 'T_4f'])
# function to show the plot
plt.show()
```



Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi studere den ikkelineære differenslikningen

$$y_{n+1}\left(\frac{1}{2}+y_n\right)=y_n \qquad n=0,1,\dots \tag{1}$$

med $y_0=1$. Ikkelineære differenslikninger er generelt vanskelige å løse for hånd, men for noen er det mulig.

a) Vis ved induksjon at $y_n>0$ for alle $n\geq 0$.

Løsning:

Siden $y_0>0$ stemmer påstanden for $n=0$, og vi antar påstanden stemmer for en $n\geq 0$, dvs at $y_n>0$. Ved åbruke likning (1) ser vi da at

$$y_n>0 \implies y_{n+1}=\frac{y_n}{0.5+y_n}>0.$$

Påstanden holder ved induksjon.

b) Vis at likningen (1) kan omskrives til en lineær differenslikning ved hjelp av variabelsubstitusjonen $x_n:=1/y_n$ (som er veldefinert siden $y_n>0$).

Løsning: Insetting gir likningen

$$x_{n+1}^{-1}\left(\frac{1}{2}+x_n^{-1}\right)=x_n^{-1}.$$

Mulitplikasjon av likningen med x_nx_{n+1} gir følgende lineære inhomogene likning:

$$x_{n+1}-\frac{x_n}{2}=1. \tag{2}$$

c) Bestem løsningen y_n for $n \geq 0$ og grenseverdien til y_n når $n \to \infty$ ved å først løse den lineære differenslikningen.

Løsning: Homogen løsning til (2):

$$x_{n+1}^h = x_n^h/2 \implies x_n^h = C2^{-n},$$

for en konstant C. Den partikulære løsningen gjetter vi er på formen $x_n^p = D$ for en konstant D. Det gir

$$x_{n+1}^p - x_n^p/2 = 1 \implies D - D/2 = 1 \implies D = 2.$$

Den generelle løsningen er

$$x_n = C2^{-n} + 2,$$

og

$$x_0 = 1/y_0 = 1 \implies C = -1 \quad \text{og} \quad x_n = 2 - 2^{-n}.$$

Konklusjon:

$$y_n = x_n^{-1} = \frac{1}{2 - 2^{-n}} \quad \text{og} \quad y_n \to \frac{1}{2} \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$