6. september 2023

MAT-INF 1100

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 21. september 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Skannede ark må være godt lesbare. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Husk å inkludere eventuell kode og kjøreeksempel, samt relevante plott og figurer i PDF-filen.

Merk at man har kun ett forsøk på oppgaven. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan du bli bedt om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) før innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For å få godkjent denne første obligatoriske oppgaven må du ha gjort seriøse forsøk på å løse alle deloppgavene, og minst halvparten av oppgavene må være tilfredsstillende besvart.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgaver

Oppgave 1. Denne oppgaven består av to deloppgaver på induksjon. Du støter her på differensligninger, som vi vil komme tilbake til i pensum senere i kurset. Du skal ikke være nødvendig å sette deg inn i denne delen av pensum for å løse disse to induksjonsoppgavene.

a) Følgen $\{x_n\}_{n\geq 0}$ er gitt ved $x_0 = \pi/2$, $x_1 = 3$, samt ved differensligningen

$$x_n = (\cos(x_{n-1}))^2 \sin(x_{n-2}), \text{ for } n \geq 2$$

Vis ved induksjon at $0 \leq x_n \leq 1$ for alle $n \geq 2$.
Løsning: La P_k være påstanden $0 \leq x_k \leq 1$. Vi har at $x_2 = \cos^2 3 \sin(\pi/2) = \cos^2 3$, slik at $0 \leq x_2 \leq 1$. Dermed er P_2 sann. Videre er $x_3 = \cos^2 x_2 \sin 3$. Siden $\sin 3 > 0$ så er også $0 \leq x_3 \leq 1$, slik at P_3 også er sann. Anta nå at, for en $k \geq 3$, så har vi vist at $P_2, ..., P_k$ er sanne. Spesielt er da $0 \leq x_{k-1}, x_k \leq 1$. Vi ser på $x_{k+1} = (\cos(x_k))^2 \sin(x_{k-1})$. Siden $0 \leq x_{k-1} \leq 1$ så følger det at $\sin(x_{k-1}) \geq 0$, slik at $0 \leq x_{k+1} \leq 1$, slik at P_{k+1} også er sann. Det følger nå at P_k er sann for alle k.

b) Vi skal se på differensligningen som definerer Fibonaccitallene,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n \geq 3,$$

der også $x_1 = x_2 = 1$. Vis ved induksjon at x_{3n} er et partall for alle $n \geq 1$.
Løsning: La P_k være påstanden at x_{3k} er et partall. Vi har at $x_3 = x_2 + x_1 = 1 + 1 = 2$, slik at P_1 er sann.
Anta vi har vist at $P_1, ..., P_k$ er sanne. Vi må vise at P_{k+1} er sann, det vil si at $x_{3(k+1)} = x_{3k+3}$ er et partall. Vi har at

$$x_{3k+3} = x_{3k+2} + x_{3k+1} = x_{3k+1} + x_{3k} + x_{3k+1} = 2x_{3k+1} + x_{3k}.$$

Siden både $2x_{3k+1}$ og x_{3k} er partall, så følger det at x_{3k+3} også er partall, slik at P_{k+1} også er sann. Det følger at P_k er sann for alle $k \geq 1$.

Oppgave 2. Denne oppgaven består av 8 deloppgaver på regning i generelle tallsystemer.

a) Finn representasjonen av $a = 1914$ i tallsystemet med base 4.
Løsning: Vi får

- $1914//4 = 478$ og $1914\%4 = 2 = d_0$.
- $478//4 = 119$ og $478\%4 = 2 = d_1$.

- $119//4 = 29$ og $119\%4 = 3 = d_2$.
- $29//4 = 7$ og $29\%4 = 1 = d_3$.
- $7//4 = 1$ og $7\%4 = 3 = d_4$.
- $1//4 = 0$ og $1\%4 = 1 = d_5$. Etter dette får vi bare nuller.

Alt i alt får vi at $1914 = 131322_4$.

b) Konverter 101011101_2 til base 16.
Løsning: Vi kan konvertere 4 sifre om gangen. Siden det er 9 binære sifre, så føyer vi til tre nuller i starten, slik at vi får 12 binære sifre, som kan konverteres til 3 heksadesimale sifre. Vi konverterer disse en om gangen:

- 0001_2 i base 16 blir 1_{16}.
- $0101_2 = 4 + 1 = 5$ i base 16 blir 5_{16}.
- $1101_2 = 8 + 4 + 1 = 13$ i base 16 blir d_{16}.

Setter vi disse sammen får vi $15d_{16}$.

c) Konverter $ef1_{16}$ til base 2.
Løsning: Vi konverterer ett siffer om gangen:

- Vi har at $e_{16} = 14 = 8 + 4 + 2 = 1110_2$.
- Vi har at $f_{16} = 15 = 8 + 4 + 2 + 1 = 1111_2$.
- Vi har at $1_{16} = 1 = 0001_2$.

Dermed får vi at $ef1_{16} = 1110\,1111\,0001_2$.

d) Når vi skriver det rasjonale tallet 4/9 i 5-tallsystemet vil vi få en sekvens av tall som repeterer seg i det uendelige. Hvilken sekvens får du?
Løsning: Sett $b = 4$. Vi har at

- $d_{-1} = (4 \cdot 5)//9 = 2$, og $b = (4 \cdot 5)\%9 = 2$.
- $d_{-2} = (2 \cdot 5)//9 = 1$, og $b = (2 \cdot 5)\%9 = 1$.
- $d_{-3} = (1 \cdot 5)//9 = 0$, og $b = (1 \cdot 5)\%9 = 5$.
- $d_{-4} = (5 \cdot 5)//9 = 2$, og $b = (5 \cdot 5)\%9 = 7$.
- $d_{-5} = (7 \cdot 5)//9 = 3$, og $b = (7 \cdot 5)\%9 = 8$.
- $d_{-6} = (8 \cdot 5)//9 = 4$, og $b = (8 \cdot 5)\%9 = 4$.

Herfra vil sifrene repetere seg, slik at sifrene 210234_5 vil gjenta seg i det uendelige.

e) Finn de første 4 sifrene (de etter punktum) til $\sqrt{2} - 1$ i det binære tallsystemet.
Løsning: Sett $a = \sqrt{2} - 1$. Vi får at

- $d_{-1} = \lfloor a \cdot 2 \rfloor = 0$, $a = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$
- $d_{-2} = \lfloor a \cdot 2 \rfloor = 1$, $a = 2 \cdot (2\sqrt{2} - 2) - 1 = 4\sqrt{2} - 5$
- $d_{-3} = \lfloor a \cdot 2 \rfloor = 1$, $a = 2 \cdot (4\sqrt{2} - 5) - 1 = 8\sqrt{2} - 11$

- $d_{-4} = \lfloor a \cdot 2 \rfloor = 0$.

Vi stopper her algoritmen før vi oppdaterer a på nytt, siden vi allerede har fått fire sifre. De første fire desimale sifrene i totallsystemet blir dermed 0110_2.

f) Regn ut $254_6 + 143_6$ ved å sette opp regnestykket i 6-tallsystemet.
Løsning: Setter vi opp under hverandre og fører opp tallene vi får i mente får vi

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 254_6 \\ +143_6 \\ \hline =441_6 \end{array}$$

Her brukte vi at

- Siste siffer: $4_6 + 3_6 = 4 + 3 = 7 = 6 + 1$.
- Andre siffer: $1 + 5_6 + 4_6 = 1 + 5 + 4 = 10 = 6 + 4$.
- Første siffer: $1 + 2_6 + 1_6 = 1 + 2 + 1 = 4 = 4_6$.

g) Regn ut $423_5 - 231_5$ ved å sette opp regnestykket i 5-tallsystemet.
Løsning: Vi får

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 5} \\ \cancel{4}23_5 \\ -231_5 \\ \hline =142_5 \end{array}$$

Her brukte vi at

- Siste siffer: Vi får at $3_5 - 1_5 = 3 - 1 = 2 = 2_5$
- Andre siffer: Vi må her låne fra første siffer, og overfører derfor 5. Vi får $5 + 2_5 - 3_5 = 5 + 2 - 3 = 4 = 4_5$.
- Første siffer: Vi får $3_5 - 2_5 = 3 - 2 = 1 = 1_5$.

h) Regn ut $4\text{ef}_{16} \times 23_{16}$ ved å sette opp regnestykket i det heksadesimale tallsystemet.
Løsning: Vi ser først på $4\text{ef}_{16} \times 3_{16}$. Vi regner først ut

$$\begin{aligned} \text{f}_{16} \times 3_{16} &= 15 \times 3 = 45 = 2\text{d}_{16} \\ \text{e}_{16} \times 3_{16} &= 14 \times 3 = 42 = 2\text{a}_{16} \\ 4_{16} \times 3_{16} &= 4 \times 3 = 12 = \text{c}_{16} \end{aligned}$$

Alternativt kan man her bruke den heksadesimale gangetabellen til hjelp. Settes disse opp under hverandre får vi

$$\begin{array}{rl} & 2\text{d}_{16} \\ 2\text{a}_{16} & \\ \text{c}_{16} \\ \hline \text{ecd}_{16} \end{array}$$

Vi ser så på $4ef_{16} \times 2_{16}$. Vi regner først ut

$$\begin{aligned} f_{16} \times 2_{16} &= 15 \times 2 = 30 = 1e_{16} \\ e_{16} \times 2_{16} &= 14 \times 2 = 28 = 1c_{16} \\ 4_{16} \times 2_{16} &= 4 \times 2 = 8 = 8_{16} \end{aligned}$$

Settes disse opp under hverandre får vi

$$\begin{array}{r} 1e_{16} \\ 1c_{16} \\ 8_{16} \\ \hline 9de_{16} \end{array}$$

Disse summeres så under hverandre:

$$\begin{array}{r} ecd_{16} \\ +9de_{16} \\ \hline acad_{16} \end{array}$$

der vi regnet ut $c_{16} + e_{16} = 1a_{16}$, $1 + e_{16} + d_{16} = 1c_{16}$ for de to siste sifrene. Vi fikk dermed $acad_{16}$.

Vi regnet her ut $1263 \times 35 = 44205$.