18. oktober 2023

MAT-INF 1100/MAT-IN1105

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 2. november 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no) for MAT-INF1100, i Devilry (devilry.ifi.uio.no) for MAT-IN1105 .

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og skanner den, eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Skannede ark må være godt lesbare. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Husk å inkludere eventuell kode og kjøreeksempel, samt relevante plott og figurer i PDF-filen.

Merk at man har kun ett forsøk på oppgaven. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan du bli bedt om en muntlig redegjørelse.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) før innleveringsfristen. Vitenskapelig ansatte kan ikke innvilge utsettelser.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For å få godkjent denne obligatoriske oppgaven må du ha gjort seriøse forsøk på å løse alle deloppgavene, og minst halvparten av oppgavene må være tilfredsstillende besvart.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgaver

Oppgave 1. Taylorrekker og induksjon

I denne oppgave skal vi studere funksjonen $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$ for alle $k \geq 0$.
Løsning: La P_k være induksjonspåstanden

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k(k+1)!/(1+x)^{k+2}.$$

P_0 sier at $f(x) = 1/(1+x)^2$, som jo bare er en gjentagelse av definisjonen av f. P_0 er derfor sann.
Anta så at vi har vist at $P_1, P_2, ..., P_k$ er sanne. Siden spesielt P_k er sann vet vi at $f^{(k)}(x) = (-1)^k(k+1)!/(1+x)^{k+2}$. Deriverer vi begge sider her får vi at

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= -(k+2)(-1)^k(k+1)!/(1+x)^{k+3} \\ &= (-1)^{k+1}(k+2)!/(1+x)^{k+3} \\ &= (-1)^{k+1}((k+1)+1)!/(1+x)^{(k+1)+2}. \end{aligned}$$

Det følger at P_{k+1} også er sann. Dermed er P_k sann for alle k.

b) Finn Taylorrekka $T_n f(x)$ til f om punktet $a = 0$, og skriv kode i Python som viser $T_1 f(x)$, $T_2 f(x)$, $T_3 f(x)$, og $f(x)$ i samme plott. Kode og plott skal legges ved innleveringen.
Løsning: Vi har at $f^{(k)}(0) = (-1)^k(k+1)!$. Fra dette følger at

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k(k+1)x^k.$$

Spesielt får vi

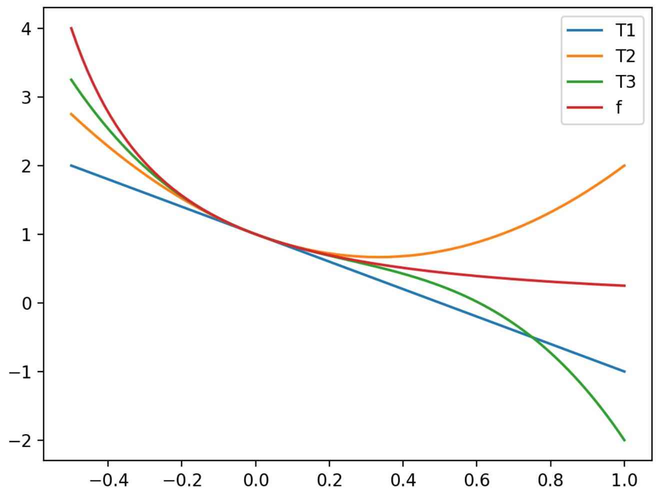
$$\begin{aligned} T_1 f(x) &= 1 - 2x \\ T_2 f(x) &= 1 - 2x + 3x^2 \\ T_3 f(x) &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \end{aligned}$$

Følgende kode kan brukes:

```python
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

x = linspace(-0.5, 1, 100)
T1 = 1 - 2*x
T2 = 1 - 2*x + 3*x**2
T3 = 1 - 2*x + 3*x**2 - 4*x**3

plt.plot(x, T1, x, T2, x, T3, x, 1/(1+x)**2)
plt.legend(['T1','T2','T3','f'])
plt.show()
```



Figur 1: $f(x)$ plottet mot de tre første Taylorpolynomene i 1c)

Dette gir plottet vist i Figur 1.

c) Finn et naturlig tall n slik at, for alle $x \in [0, 0.5]$, så er

$$|T_n f(x) - f(x)| \leq 0.01.$$

Løsning: Vi har at $|f^{(n+1)}(x)| = (n+2)!/(1+x)^{n+3} \leq (n+2)!$ for alle $x \in [0, 0.5]$. Siden

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

for en $c \in [0, x]$, så følger det at $|R_n f(x)| \leq (n+2)0.5^{n+1}$ for alle $x \in [0, 0.5]$. Vi må derfor finne en n slik at $(n+2)2^{-n-1} \leq 0.01$, det vil si at $2^{n+1}/(n+2) \geq 100$. Prøver vi oss frem blir venstresiden her

- $1024//11 < 100$ for $n = 9$,
- $2048/12 > 100$ for $n = 10$.

Vi kan derfor sette $n = 10$.

Oppgave 2. Interpolasjon

Finn Newtonformen til det entydige polynomet av grad ≤ 3 som interpolerer funksjonen $f(x) = x^5$ i punktene $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, og $x_3 = 2$.

Løsning: Newtonformen for det interpolerende polynomet gir ligningene

$$\begin{aligned}
-1 &= c_0 \\
0 &= c_0 \quad +c_1(0+1) \\
1 &= c_0 \quad +c_1(1+1) \quad +c_2(1+1)(1+0) \\
32 &= c_0 \quad +c_1(2+1) \quad +c_2(2+1)(2+0) \quad +c_3(2+1)(2+0)(2-1).
\end{aligned}$$

Den første ligningen sier at $c_0 = -1$. Setter vi dette inn i den andre ligningen får vi at $c_1 = 1$. Den tredje ligningen sier da at $1 = -1+2+2c_2$, slik at $c_2 = 0$. Den fjerde ligningen sier at $32 = -1 + 3 + 6c_3$, slik at $c_3 = 5$. Dette gir oss Newtonformen

$$p_3(x) = -1 + (x+1) + 5(x+1)x(x-1).$$

Oppgave 3. Numerisk derivasjon

Hvis vi setter $f(x) = x^3$, hva blir da feilen

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

for den symmetriske Newton kvotienten (se seksjon 11.4.1 i kompendiet)? Du kan se bort fra avrundingsfeil.

Løsning: Vi må regne ut

$$\begin{aligned}
&\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \\
&= \frac{(a+h)^3 - (a-h)^3}{2h} \\
&= \frac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - (a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3)}{2h} \\
&= \frac{6a^2h + 2h^3}{2h} = 3a^2 + h^2.
\end{aligned}$$

Feilen blir

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = 3a^2 - (3a^2 + h^2) = -h^2.$$