UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger
Eksamensdag:	12. desember 2003
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \sin(-x)$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $x - x^3/6$ ☐ $-x - x^3/6$ ☐ $1 - x^2/2$ ☐ $-x + x^3/6$
☐ $x - x^2/2$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = \sqrt{1+x}$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16$ ☐ $1 + x - x^2/2 + x^3/3$
☐ $1 + x/2 + x^2/3 + x^3/4$ ☐ $1 - x/2 + x^2/8 - x^3/16$
☐ $1 + x/2 + x^2/8 + x^3/16$

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \int_0^x \sin(u^2)\, du$ om punktet $a = 0$ er

☐ 1 ☐ -1 ☐ $-1/2$ ☐ 0 ☐ $1/6$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Bernsteinpolynomene $b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, der $0 \le i \le n$ og $n \ge 0$, har egenskapen

□ $\sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(x) = 2$ □ $b'_{i,n}(x) = 0$ for alle $x \in [0,1]$
□ $\sum_{i=0}^{n} b'_{i,n}(x) = 0$ for alle $x \in [0,1]$ □ $b'_{i,n}(1) = 1/2$
□ $b'_{i,n}(x) \le -2$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + 2xy = 2x$ har løsningen

□ $y(x) = 1 + Cx$ □ $y(x) = -1 + x + Ce^{-x^2/2}$ □ $y(x) = x + Ce^{-x}$
□ $y(x) = 2x + Ce^{x}$ □ $y(x) = 1 + Ce^{-x^2}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 6. Differensialligningen $y' + y/x = 1/x^3$ med initialverdi $y(1) = 0$ og $x > 0$ har løsningen

□ $y(x) = 1/x - 1/x^2$ □ $y(x) = 1 - x$ □ $y(x) = e - e^{x}$
□ $y(x) = 1/x^3 - 1/x$ □ $y(x) = x/(1+x)$

Oppgave 7. Differensialligningen $x^2y' + y = 0$ der $x > 0$, har den generelle løsningen

□ $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$ □ $y(x) = Ce^{x}$ □ $y(x) = Ce^{1/x}$
□ $y(x) = Ce^{x^2}$ □ $y(x) = e^{x+C}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 8. Differensialligningen $y'' - 3y' - 4y = 0$ har den generelle løsningen

□ $y(x) = C\sin(3x) + D\cos(4x)$ □ $y(x) = Ce^{-x} + De^{4x}$
□ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ □ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$
□ $y(x) = Ce^{-3x} + De^{-4x}$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 6y' + 9y = 0$ med initialverdier $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$ har løsningen

□ $y(x) = 3xe^{3x}$ □ $y(x) = 3x$ □ $y(x) = e^{-x}\sin(3x)$
□ $y(x) = e^{3x}(2x - 2)$ □ $y(x) = 3xe^{x}$

Oppgave 10. Differensialligningen $(1 + x^2)y' = y - 1$ med initialverdi $y(0) = 0$ har løsningen

□ $y(x) = \sin x$ □ $y(x) = x$ □ $y(x) = 1 - e^{\arctan x}$
□ $y(x) = \arctan x$ □ $y(x) = \tan x$

(Fortsettes på side 3.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 3 og 5 er det derfor mulig å løse oppgave (b) selv om du ikke har fått til oppgave (a).

Oppgave 1. Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n + 1, \quad n \geq 0,$$

med initialverdier $x_0 = 0$ og $x_1 = 0$.

Oppgave 2. Du skal beregne en tilnærmet verdi for integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

og ønsker å bruke trapesformelen. Du bruker $n + 1$ punkter $(x_i)_{i=0}^n$ der $x_0 = 0$, $x_n = 1$, og $x_{i+1} - x_i = 1/n$ for $i = 0, \ldots, n-1$. Finn en verdi for n slik at du kan garantere at feilen blir mindre enn 10^{-10} (vi ser bort fra avrundingsfeil).

Du får bruk for følgende: *Dersom vi bruker trapesmetoden for å estimere integralet $\int_a^b f(x)\, dx$ med $n+1$ punkter $x_0 = a$, $x_n = b$ og $x_{i+1} - x_i = (b-a)/n$ for $i = 0, \ldots, n-1$, så er feilen gitt ved*

$$Rf = \frac{(b-a)^3 f''(c)}{12n^2},$$

for en eller annen $c \in [a, b]$, hvis f'' er kontinuerlig.

Oppgave 3. En funksjon $y(x)$ er definert for alle relle tall x slik at $x \geq 0$. For hver slik x har $y(x)$ egenskapen at arealet mellom x-aksen og grafen til $y(x)$ på intervallet $[0, x]$, addert til funksjonens førstederivert i x, gir som resultat x^3.

a) Forklar hvorfor y må tilfredstille differensialligningen

$$y'' = 3x^2 - y.$$

b) Vi vet i tillegg at $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$, bruk dette til å finne $y(x)$.

Oppgave 4. Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=1}^{n} i\, 2^i = 2\bigl(1 + (n-1)2^n\bigr)$$

for alle naturlige tall n.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5.

a) For å finne en numerisk tilnærming til den deriverte til en funksjon f i punktet a kan vi bruke formelen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1}$$

Hvis vi bruker denne tilnærmingen og regner med flyttall viser det seg at feilen $E_f(h)$ kan skrives som

$$E_f(h) = C_1 h + \frac{C_2}{h} \tag{2}$$

for passende konstanter C_1 og C_2 som avhenger av f og a, men ikke h. Forklar hvilken feilkilde som gir opphav til det første leddet $C_1 h$ og hvilken feilkilde som gir opphav til det andre leddet C_2/h.

b) For en bestemt funksjon har vi $C_1 = 1$ og $C_2 = 10^{-16}$ når vi regner med 64 bits flyttall. Hva er da den beste verdien av h vi kan bruke hvis vi ønsker at tilnærmingen i (1) skal gi minst mulig feil?

Lykke til, både med eksamen og videre studier, og god jul!