UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 7. desember 2005.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = x^2 - \sin x$ utviklet om punktet $a = 0$ er

☐ 0 ☐ $-1/2$ ☐ -1 ☐ 1 ☐ $1/2$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = e^{x^2}$ utviklet om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x^2$ ☐ $1 + x + x^2/2$ ☐ $1 + x^2/2$ ☐ x^2 ☐ $1 - x^2/2$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

□ $y'' + \sin y = x$ □ $y' + y \sin x = 1$ □ $y' + y^{1/2} = 0$
□ $y'' + y' = \cos y$ □ $y' + 1/y = 2$

Oppgave 4. Differensialligningen $y''+4y'+5y = 0$ har den generelle løsningen

□ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$ □ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$
□ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ □ $y(x) = C \cos x + D \sin x$
□ $y(x) = e^{x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

□ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$ □ $y(x) = x^2 + Ce^{x}$ □ $y(x) = x^2 + C$
□ $y(x) = x^3/3 + C$ □ $y(x) = 1 + Ce^{-x^3/3}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 6. Vi benytter Eulers metode for å finne numeriske løsninger av ligningen $y' = ay$. Dette gir en differensligning for $\{y_j\}$ der $y_j \approx y(jh)$, hvilken?

□ $y_j = e^{ah} y_{j-1}$ □ $y_j = (1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2)y_{j-1}$ □ $y_j = y_{j-1} + ah$
□ $y_j = (1 + ah)y_{j-1}$ □ $y_j = e^{ax}$

Oppgave 7. Vi tilnærmer den deriverte til funksjonen $f(x)$ med uttykket $\big(f(h) - f(0)\big)/h$. Da er feilen

$$\left| f'(0) - \frac{f(h) - f(0)}{h} \right|$$

begrenset av

□ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big|f''(x)\big|$ □ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big|f''(x)\big|$

□ $h \max_{x \in [0,h]} \big|f(x)\big|$ □ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x \in [0,h]} \big|f'''(x)\big|$

□ $\dfrac{h}{2} \max_{x \in [0,h]} \big|f'(x)\big|$

(Fortsettes side 3.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Oppgave 2. Finn Taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Oppgave 3. Vis ved induksjon at den n'te deriverte av funksjonen $f(x) = xe^x$ er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$$

for ethvert heltall $n \geq 0$.

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning med tilhørende randverdier på intervallet $[0, 1]$,

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

der α er en reell konstant. Legg merke til at vi har gitt en randbetingelse ved $x = 0$ og en ved $x = 1$.
Finn løsningen.
Finnes det verdier av α slik at løsningen ikke eksisterer?

Oppgave 5. Vi har gitt en førsteordens differensialligning med en initialverdi,

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

a) Løs differensialligningen og vis at $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

b) Vi forsøker å løse ligningen med en numerisk metode som bestemmer en tilnærming $y_j \approx y(jh)$ til løsningen i punktene $x_j = jh$ der $j = 0, 1, 2, \ldots$ og h er en positiv steglengde. Dette gjør vi med følgende algoritme:

   1. Fra initialbetingelsen finner vi $y_0 = 1$ mens y_1 bestemmes til $y_1 = 1 - h$ ved hjelp av Eulers metode.
   2. Vi finner y_j for $j \geq 2$ ved "hoppe-bukk" ("leap-frog") metoden

$$\frac{y_j - y_{j-2}}{2h} = -y_{j-1}.$$

   Dersom vi simulerer denne differensligningen ved hjelp av flyttall, vil den numeriske løsningen ikke nærme seg 0 når x blir stor, men vokse over alle grenser. Forklar hvorfor dette skjer.

   Hint: Finn den generelle løsningen til *differens*ligningen.

Lykke til og god jul!

SLUTT