UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 7. desember 2006.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = x^2 - \cos x$ utviklet om punktet $a = 0$ er

- ☐ 0
- ☐ $-1/2$
- ☐ $3/2$
- ☐ 1
- ☐ $1/2$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = \sin\bigl(x^2\bigr)$ utviklet om punktet $a = 0$ er gitt ved

- ☐ $x^2/2$
- ☐ $x + x^2/2$
- ☐ $x - x^2/2$
- ☐ $-x^2$
- ☐ x^2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Differensialligningen $y'' + 4y' + 4y = 0$ har den generelle løsningen

- ☐ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$
- ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + Dxe^{-2x}$
- ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{2x}$
- ☐ $y(x) = C \cos 2x + D \sin 2x$
- ☐ $y(x) = e^{-2x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Oppgave 4. Differensialligningen $x^2y' + y = 1$, der $x > 0$, har den generelle løsningen

- ☐ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$
- ☐ $y(x) = 1 + Ce^{x}$
- ☐ $y(x) = x^2 + C$
- ☐ $y(x) = 1 + Ce^{1/x}$
- ☐ $y(x) = Cx^2$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Oppgave 5. En partikulærløsning av differensialligningen $y'' - 3y' = 1$ er gitt ved

- ☐ $y(x) = e^{3x}/3$
- ☐ $y(x) = -1/3$
- ☐ $y(x) = -x^2/3$
- ☐ $y(x) = x/3$
- ☐ $y(x) = -x/3$

Oppgave 6. Vi har en bakteriekultur der antall bakterier, y, er en funksjon av tiden, t, som vi måler i timer. Vekstraten (den tidsderiverte av antallet) er proposjonal med antallet y. Videre vet vi at antallet bakterier fordobler seg i løpet av to timer. Hva er differensialligningen som beskriver veksten av bakteriekulturen ?

- ☐ $y' = -2y$
- ☐ $y' = y(1 + 2y)$
- ☐ $y'' = 4y$
- ☐ $y' = \dfrac{\ln 2}{2} y$
- ☐ $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} y$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi tilnærmer det bestemte integralet $\int_0^h f(x)\,dx$ med uttykket $h\bigl(f(0)+f(h)\bigr)/2$ der vi antar at f, f' og f'' er kontinuerlige funksjoner. Da er feilen

$$\Bigl|\int_0^h f(x)\,dx - \frac{h}{2}\bigl(f(0)+f(h)\bigr)\Bigr|$$

begrenset av

- ☐ $h^2 \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'(x)\bigr|$
- ☐ $\dfrac{5h^3}{12} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f''(x)\bigr|$
- ☐ $h \max_{x\in[0,h]}\bigl|f(x)\bigr|$
- ☐ $\dfrac{h^2}{2} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'''(x)\bigr|$
- ☐ $\dfrac{h}{2} \max_{x\in[0,h]}\bigl|f'(x)\bigr|$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1. Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 0.$$

Oppgave 2. Finn Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

og vis at restleddet $R_3 f(x)$ er begrenset ved

$$\left|R_3 f(x)\right| \leq 0.1$$

på intervallet $[0, 1]$.

Oppgave 3. Det desimale tallet 12.125 skal konverteres fra ti-tall systemet til to-tall systemet (binær form). Alle stegene i konverteringen skal gjengis nøyaktig.

Oppgave 4. Vi har gitt differensligningen

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1, \quad x_0 = 0.$$

Vis ved induksjon at $x_n \leq 1$ for alle heltall $n \geq 0$.

Oppgave 5. Vi har gitt differensialligningen

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = \gamma,$$

der vi antar at $x > 0$. For hvilken verdi av γ vil $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$?

Oppgave 6.
Vi har gitt en funksjon $f(x) = x^\beta$, der β er et positivt, reelt tall. Ligningen $f(x) = 0$ har naturligvis løsningen $x = 0$, men vi ønsker å bruke den til en test av Newtons metode.

a) Vi anvender Newtons metode på ligningen $f(x) = 0$ med startverdi $x_0 = a$ der $a > 0$. Vis at Newtons metode konvergerer for alle $\beta \geq 1$. Hva skjer når $\beta = 1/2$?

b) Vi velger $a = 1$ og $\beta = 4$. Hvor mange iterasjoner må vi bruke for at feilen skal bli mindre enn 0.001?

Lykke til og god jul!