UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 6. desember 2010.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' - 2y' - 3y = 0$ med initialverdier $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$ er

- ☐ $y(x) = e^{-x}$
- ☐ $y(x) = 3e^{3x} - 3e^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{x} + xe^{x}$
- ☐ $y(x) = e^{3x}$
- ☐ $y(x) = e^{-2x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$ med initialverdi $y(0) = 2$ er

- ☐ $y(x) = 2\cos x$
- ☐ $y(x) = 1/(1 + x^2)$
- ☐ $y(x) = 1 + e^{x^2}$
- ☐ $y(x) = 1 + e^{-(x^3/3)}$
- ☐ $y(x) = 1 - e^{x^2}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Vi skal løse differensialligninger numerisk. For fire av disse ligningene kan vi få store problemer om vi velger uheldige startverdier for x og t. For hvilken ligning vil vi aldri kunne få store problemer?

- ☐ $x'x = 1$
- ☐ $x' = e^t/(1 + x^2)$
- ☐ $x' = t + \ln x$
- ☐ $x' = t/(x - 2)$
- ☐ $x' = \sqrt{1 - x^2}$

Oppgave 4. Hvilke(n) av de tre integrasjonsmetodene trapesmetoden, midtpunktmetoden og Simpsons metode vil være nøyaktig for et førstegrads polynom?

- ☐ Bare trapesmetoden
- ☐ Bare midtpunktmetoden
- ☐ Bare Simpsons metode
- ☐ Bare trapesmetoden og Simpsons metode
- ☐ Alle sammen

Oppgave 5. En tekst er lagret i en fil med en standard koding, og et av tegnene er kodet med én byte. Hvilken koding kan filen IKKE være kodet med?

- ☐ UTF-8
- ☐ UTF-16
- ☐ ISO Latin-1
- ☐ ASCII
- ☐ Den kan være kodet med alle

Oppgave 6. Entropien til en tekst angir det minimale antall bits per tegn som teksten kan kodes med. Hvis vi bruker Huffman-koding basert på tegnenes frekvens i teksten, hvilken av disse tekstene oppnår IKKE minimalt antall bits per tegn?

- ☐ AABB
- ☐ ABCC
- ☐ ABBB
- ☐ ABCD
- ☐ Alle fire tekstene over oppnår minimalt antall bits per tegn

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke sekantmetoden til å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^3 - 2$ og begynner med startverdiene $x_0 = -2$ og $x_1 = 2$. Etter ett steg, hva er det tilnærmede nullpunktet x^*?

☐ $x^* = -0.2$

☐ $x^* = 0$

☐ $x^* = 0.33$

☐ $x^* = 0.5$

☐ $x^* = 1$

I denne oppgaven kan du få bruk for at sekanten $s(x)$ til f gjennom de to punktene a og b er gitt ved

$$s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Oppgave 8. Vi skal beregne en tilnærming til den deriverte $f'(a)$ til funksjonen $f(x) = \cos x$ ved hjelp av tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Da er absoluttfeilen for enhver $h > 0$ begrenset av (vi ser bort fra avrundingsfeil)

☐ $h^2/2$

☐ $h^2 \cos(1)$

☐ $h \sin(0)$

☐ $h \cos(a)/4$

☐ $h/2$

Oppgave 9. Differensialligningen $x'' + tx' - t^2 = 5$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = 5 + t(t - x_2)$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = t^2 - x_1$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = 5 + t(t - x_1)$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = 5 + t(t - x_2)$

☐ $x_2' = x_1, \quad x_1' = 5 + t^2 - tx_2$

Oppgave 10. En full melkekartong holder 4 grader og blir satt i et rom med temperatur 20 grader ved tiden $t = 0$. La $T(t)$ være temperaturen i melken ved tiden t. Hvilken av differensialligningene nedenfor er en fornuftig beskrivelse av temperaturutviklingen i melken?

☐ $T' = T - 20, \quad T(0) = 4$

☐ $T' = 4T, \quad T(0) = 20$

☐ $T' = k(20 - T), \quad T(0) = 4$ og $k > 0$

☐ $T' = (T - 4)/k, \quad T(0) = 4$ og $k < 0$

☐ $T' = 20 - 4T, \quad T(0) = 4$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1.

a) Du har en sum penger a som du setter i banken til 4 % årlig rente. Du vet også at du har har behov for å ta ut kr. 10 000 hvert år. Forklar hvorfor differensligningen

$$y_{n+1} - \frac{26}{25} y_n = -10\ 000, \quad y_0 = a, \tag{1}$$

beskriver utviklingen av kapitalen og løs ligningen.
For resten av oppgaven får du oppgitt at

$$y_n = 250\ 000 + (a - 250\ 000)\left(\frac{26}{25}\right)^n.$$

Du ønsker at kapitalen skal være fullstendig oppbrukt etter 10 år, hvor mye må du da sette inn når sparingen begynner?

b) Anta at vi skal simulere kapitalutviklingen over mange år (med en mye større startkapital enn det du fant i (a)). Forklar hvilke problemer avrundingsfeil vil kunne gi for en slik simulering?

Oppgave 2. Kod ordet *Beregninger* med Huffman-koding.
Hvor mye avviker lengden på denne koden fra lengden til en optimal kode?

I oppgave 2 kan du få bruk for at entropien til et alfabet $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ der α_i har sannsynlighet $p(\alpha_i)$ er gitt ved

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i) \log_2 p(\alpha_i).$$

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \frac{t}{3x^2}, \quad x(0) = 1.$$

a) Finn en formel for løsningen $x(t)$.

b) Start i $t = 0$ og regn ut en tilnærming til $x(0.4)$ ved å ta to steg med Eulers metode med $h = 0.2$.
Finn også en tilnærming til $x(0.4)$ ved å ta ett steg med kvadratisk Taylor, med $h = 0.4$.
Hvilken av de to numeriske løsningene gir minst absolutt feil i $t = 0.4$?

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 4. Vi trenger å regne ut en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^1 \sin(z^2)\,dz.$$

a) Vi bestemmer oss for å gjøre dette ved å tilnærme $\sin x$ med sitt Taylor-polynom av grad 5 om $a = 0$, erstatte x med z^2 og integrere. Forklar hvorfor dette gir tilnærmingen

$$\int_0^1 \sin(z^2)\,dz \approx \frac{2867}{9240}.$$

b) Vi bruker samme strategi som i (a), men tilnærmer nå $\sin x$ med et Taylor-polynom av grad $2n-1$, for en $n \geq 1$ slik at vi får en tilnærming I_n til integralet. Vis at feilen da er begrenset ved

$$\left| \int_0^1 \sin(z^2)\,dz - I_n \right| \leq \frac{1}{(4n+3)(2n+1)!} \max_{x\in[0,1]} \left| f^{(2n+1)}(x) \right|,$$

der $f(x) = \sin x$.
Finn en verdi av n som garanterer at feilen blir mindre enn 10^{-10}.

I denne oppgaven kan du få bruk for at Taylor-polynomet til $\sin x$ av grad $2n-1$ om $a = 0$ er gitt ved

$$T_{2n-1}(\sin;0)(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Lykke til!