UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 5. Desember 2014.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \ln(x + 1)$?

A: 0

B: $x^2/2$

C: x

D: $x + x^2/2$

E: $x - x^2/2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = \pi$ for funksjonen $f(x) = \sin x$?

A: $(x - \pi) - (x - \pi)^3/6$

B: $-x^2/2$

C: $-(x - \pi)^3/3$

D: $-(x - \pi) + (x - \pi)^3/6$

E: $x - x^3/3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi si om feilleddet $R_n(x)$?

A: Feilleddet vil for hver x gå mot uendelig når n går mot uendelig.

B: For alle reelle tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot uendelig.

C: Feilleddet er 0 overalt.

D: Feilleddet vil gå mot 0 når n går mot uendelig for alle x i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av x.

E: For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$

B: $y(x) = e^{x} + e^{3x}$

C: $y(x) = e^{x} + 2e^{3x}$

D: $y(x) = 2e^{x} + e^{3x}$

E: $y(x) = 2e^{x}$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $y' + y^2x^2 = 0$ er

A: $y(x) = 1/(x^3/3 + 1)$

B: $y(x) = 1/(1 - x^3/3)$

C: $y(x) = 1/(x^3 + 1)$

D: $y(x) = 1/(x^2/3 - 1)$

E: $y(x) = e^{-x^3/3+1}$

Oppgave 6. Newton-formen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = (x-1)^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$ er

A: $p_3(x) = -1 - x + x(x-1)(x-2)$

B: $p_3(x) = -1 + x + x(x-1)(x-2)$

C: $p_3(x) = -1 + x - x(x-1)(x-2)$

D: $p_3(x) = 1 + x + x(x-1)(x-2)$

E: $p_3(x) = -1 + 2x + 2x(x-1)(x-2)$

Oppgave 7. Vi tar to steg med Newtons metode for $f(x) = x^2 - 2$, og starter i $x_0 = 1$. Da får vi

A: $x_2 = 7/5$

B: $x_2 = 3/2$

C: $x_2 = 17/12$

D: $x_2 = 1$

E: $x_2 = 15/12$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a))/h,$$

og at den symmetriske Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a-h))/(2h).$$

Hvilken av følgende påstander om numerisk derivasjon er sann?

A: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle tredjegradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

B: Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

C: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

D: Vi trenger ikke ta hensyn til avrundingsfeil når vi gjør numerisk derivasjon.

E: Både Newton-kvotienten og den symmetriske Newton-kvotienten gir en feil av størrelse $h^2/6$, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

Oppgave 9. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut $\int_0^2 x^2 dx$ får vi

A: 5/2

B: 8/3

C: 11/2

D: 11/4

E: 3

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + (\sin t)x' + 5x = \tan t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$

B: $x_1' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t, \quad x_2' = x_1,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

C: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 + 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1$

E: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at, for alle $n \geq 1$, så er

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2.$$

Oppgave 2. Vis at differenslikningen

$$6x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 4^{-n}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -2/3$$

har løsning $x_n = -8 \cdot 3^{-n} + 8 \cdot 4^{-n} = 8(4^{-n} - 3^{-n})$. Hva skjer for store n når denne differenslikningen simuleres på en datamaskin med 64 bits flyttall?

Oppgave 3. Vi har gitt teksten $\mathbf{x} = ABCDAABA$. Skriv opp et Huffman-tre for denne teksten, og skriv opp Huffman-koden for teksten. Hvor mange bits per symbol bruker koden?

Oppgave 4.

a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad n, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = e^x$ om 0. Skriv også opp et uttrykk for restleddet $R_n(x)$.

b) Bruk Taylorrekka med restledd fra a) til å regne ut $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ med en nøyaktighet på 0.01.

Oppgave 5. Vi har gitt differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1 + t, \quad x(0) = 0.$$

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i a)? Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?

Lykke til!