UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger
Eksamensdag:	15. oktober 2004
Tid for eksamen:	11:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 10111101 er det samme som det desimale tallet

☐ 205 ☐ 189 ☐ 301 ☐ 156 ☐ 123

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det desimale tallet 123

☐ 1100110 ☐ 100011 ☐ 1111011 ☐ 1100101 ☐ 1010110

Oppgave 3. Desimaltallet 0.6 kan skrives på binær form som

☐ 0.100110011 ☐ 0.10010101 ☐ 0.111011

☐ kan ikke skrives som et binært tall

☐ krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Det reelle tallet $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ er

☐ et irrasjonalt tall ☐ uendelig ☐ -1 ☐ 1/3

☐ et rasjonalt tall

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. Den minste øvre skranken x til en vilkårlig, begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ tilfredstiller

☐ $x \in A$ ☐ $x > a$ for alle $a \in A$ ☐ $x \geq a$ for alle $a \in A$ ☐ $x \in \mathbb{N}$
☐ $x \leq a$ for alle $a \in A$

Oppgave 6. Den minste øvre skranken til mengden $\{x < 2 \mid \sin x \geq 1\}$ er

☐ $\pi/2$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 0 ☐ $\sqrt{2}$

Oppgave 7. En følge er definert ved $x_n = 2 + 1/n^2$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre og minste øvre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

☐ 0 og 2 ☐ 2 og ∞ ☐ 0 og ∞ ☐ 2 og 3 ☐ 0 og n

Oppgave 8. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(a+1)^{4361}$, hva blir da koeffisienten foran a^{4360}?

☐ 4360 ☐ 1 ☐ 4361 ☐ 8720 ☐ 2180

Oppgave 9. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ `NaN` er et reelt tall ☐ ∞ er et reelt tall
☐ Det fins flere 32 bits flyttall enn 64 bits flyttall
☐ π kan representeres eksakt ved hjelp av 64 bits flyttall
☐ Ethvert reelt tall kan tilnærmes vilkårlig godt med rasjonale tall

Oppgave 10. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Alle ligninger har løsninger som bare kan uttrykkes ved hjelp av rottegn
☐ Halveringsmetoden konvergerer vanligvis raskere enn Newtons metode
☐ For ethvert reelt tall a fins det en andregradsligning som har a som rot
☐ Et polynom av grad n har alltid n reelle nullpunkter
☐ I andregradsligninger er alltid et nullpunkt større enn det andre

Oppgave 11. Hvilket av følgende uttrykk vil kunne gi stor relativ feil for spesielle verdier av a, b og c når det regnes med flyttall, vi ser bort fra underflow og overflow, og a, b og c er slik at operasjonene gir mening?

☐ $a(b+c)$ ☐ abc ☐ a/b ☐ $a/(bc)$ ☐ $\sin(abc)$

Oppgave 12. En kontinuerlig funksjon f har et nullpunkt i intervallet $[0,1]$, og vi bruker halveringsmetoden for å finne en numerisk tilnærming til nullpunktet. Vi ønsker å bestemme nullpunktet med feil mindre enn 10^{-15}. Hvor mange halveringer må vi i så fall gjøre for å være sikre på at vi overholder dette kravet når vi ikke vet noe nærmere om hvor nullpunktet befinner seg?

☐ 50 ☐ 16 ☐ 35 ☐ 43 ☐ 66

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 13. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

□ $x_{n+1} + nx_n = 1$ □ $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n = \sin(2n)$
□ $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n^2 = 0$ □ $x_{n+2} - \log(x_{n+1}) + x_n = 2$
□ $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$ der A er en konstant

Oppgave 14. Kun ett av de følgende ligningssett (differensligning + initialbetingelser) har en entydig bestemt løsning for x_n for $n = 0, \dots, \infty$, hvilket ?

□ $x_{n+1} + nx_n = 1$ □ $x_{n+2} - x_n = n, \quad x_0 = 1$
□ $x_{n+2} - \frac{5}{11}x_{n+1} + x_n^2 = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$
□ $x_{n+3} + x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$
□ $x_{n+1} = x_n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 3x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{3}{2}.$$

Hva er løsningen?

□ $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}2^n$ □ $x_n = 2 - (\frac{3}{2})^n$ □ $x_n = (\frac{3}{2})^n$ □ $x_n = 2^n - \frac{3}{2}$
□ $A\sin(n)$ der A er en vilkårlig konstant

Oppgave 16. Vi har ligningsettet

$$x_{n+1} = r_n x_n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = a,$$

der r_n er en gitt sekvens av reelle tall og a er et reelt tall. Hva er løsningen?

□ $x_n = an!$ □ $x_n = ar^n$ □ $x_n = ar_n$ □ Det finnes ingen løsning
□ $x_n = a\prod_{j=0}^{n-1} r_j$

Oppgave 17. Vi har differensligningen

$$x_{n+1} - x_n = n.$$

Hvilken av følgende er en partikulærløsning ?

□ $x = n^2$ □ $n!$ □ $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
□ $An + B$ der A og B er konstanter □ 2^n

Oppgave 18. Vi har skrevet et (korrekt) Javaprogram som simulerer differensligninger av første og andre orden ved hjelp av flyttall. For hvilket av problemene nedenfor får vi at den simulerte løsningen Java gir går mot null når $n \to \infty$?

□ $x_{n+2} - \frac{10}{3}x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{2}{3}$
□ $x_{n+1} = (2 + \frac{1}{n})x_n, \quad x_0 = 1$
□ $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1$
□ $8x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 4$
□ $x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = n, \quad x_0 = 0$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 19. Vi har differensligningen med initialverdier gitt ved

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 18x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen ?

☐ $\left(3\sqrt{2}\right)^n[\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{4}} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{-in\pi}{4}}]$ ☐ $\frac{5}{4}3^n - \frac{5}{4}2^n$ ☐ $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

☐ $\frac{1}{3}(3\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ ☐ n

Oppgave 20. I denne oppgaven skal vi studere differensligningen

$$x_n = \frac{2}{x_{n-1}} + 1, \qquad n \geq 1$$

med startverdien $x_0 = 1$. Vår hypotese er at løsningen av differensligningen er gitt ved

$$x_n = \frac{6}{2 + (-1/2)^n} - 1. \tag{1}$$

La P_n for $n = 0, 1, 2, \ldots,$ betegne påstanden at formelen (1) er sann.

Vi forsøker å vise dette ved induksjon:

1. Vi ser med en gang at $x_0 = \frac{6}{2+1} - 1 = 1$ så P_0 er sann.
2. Anta at vi har vist at P_n er sann for $n = 0, \ldots, k$, vi må vise at da er også P_{k+1} sann. Ved å utnytte at P_k er sann og ved manipulasjon av brøker får vi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{2}{x_k} + 1 = \frac{2}{\dfrac{6}{2 + (-1/2)^k} - 1} + 1 = \frac{2}{\dfrac{4 - (-1/2)^k}{2 + (-1/2)^k}} + 1 \\ &= \frac{2(2 + (-1/2)^k)}{4 - (-1/2)^k} + 2 - 1 = \frac{12}{2(2 - (1/2)(-1/2)^k)} - 1 \\ &= \frac{6}{2 + (-1/2)^{k+1}} - 1 \end{aligned}$$

som stemmer med formelen (1) for $n = k+1$. Dermed ser vi at om P_k er sann er også P_{k+1} sann, så formelen (1) er riktig for alle $n \geq 0$.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Påstanden P_n er sann, men del 1 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er feil, men del 2 av induksjonsbeviset er riktig

☐ Påstanden P_n er feil, men del 1 av induksjonsbeviset er riktig

☐ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige

Det var det!!