UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 12. oktober 2006.
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1001110101 er det samme som det desimale tallet

☐ 831 ☐ 451 ☐ 629 ☐ 600 ☐ 527

Oppgave 2. Skrevet i totallssystemet blir det desimale tallet -481

☐ -111100001 ☐ -111110011 ☐ -10010111 ☐ -11100101 ☐ -10101101

Oppgave 3. Desimaltallet 1.2 kan skrives på binær form som

☐ 1.00110011 ☐ 1.0011 ☐ 1.01 ☐ 1.001 ☐ krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Det reelle tallet $\dfrac{(\sin(\pi/3)-1)^2+\sqrt{3}}{31}$ er

☐ et irrasjonalt tall ☐ et imaginært tall ☐ 0 ☐ eksisterer ikke ☐ et rasjonalt tall

Oppgave 5. En følge er definert ved $x_n = n^2$ for $n \geq 1$. Hva er største nedre skranke for tallmengden gitt ved $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

☐ 1 ☐ er ikke definert ☐ 0 ☐ 1/2 ☐ ∞

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 6. Den minste øvre skranken til mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 4 < 6\}$ er

☐ π ☐ $2^{1/3}$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $\sqrt{2}$

Oppgave 7. Anta at vi multipliserer ut parentesene i uttrykket $(b+\sqrt{2})^{30}$, hva blir da koeffisienten foran b^{28}?

☐ 435 ☐ 30 ☐ 28 ☐ 870 ☐ 1740

Oppgave 8. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ Bruk av heltall på datamaskin gir alltid avrundingsfeil

☐ I Java fins det et tall av type `int` som er nøyaktig lik 4983874

☐ Det fins uendelig mange heltall med 10^{10} siffer

☐ Alle rasjonale tall kan skrives eksakt ved hjelp av en endelig binærsifferutvikling

☐ Hvis kvadratet av et irrasjonalt tall a er et heltall er a et partall

Oppgave 9. Hva blir innholdet i variabelen `s` etter at kodebiten

```
int i, j, s = 0;
for (i=1; i<3; i++)
{
     j = i*i;
     s += j/i;
}
```

er utført?

☐ 3 ☐ 0 ☐ `Infinity` ☐ 5 ☐ 1

Oppgave 10. Hva blir innholdet av variabelen `p` etter at kodebiten

```
int i;
float j, p = 1;
for (i=0; i<5; i++)
{
     j = i;
     p *= (j*j)/j;
}
```

er utført?

☐ 1 ☐ `NaN` ☐ Programmet stopper ☐ 24 ☐ 0

Oppgave 11. Verdien av funksjonen $f(x) = \ln x$ skal beregnes ved hjelp av `float`-variable for $x = 1.0001$. Omtrent hvor mange desimale siffer vil du miste i beregningen?

☐ Ingen ☐ 16 ☐ 8 ☐ 1 ☐ 4

Hint: Vi antar at feilen, δ, i x ved bruk av `float` er ca. 10^{-8}. Bruk den relative feilen definert som

$$\frac{\left|f(x+\delta) - f(x)\right|}{\left|f(x)\right|}.$$

Du kan eventuelt også gjøre bruk av kondisjonstallet til f som er gitt ved

$$\kappa(f;a) = \frac{\left|f'(a)a\right|}{\left|f(a)\right|}.$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 12. Vi forsøker å finne nullpunktene til funksjonen $f(x) = (x-3)(x^2-3x+2)$ ved hjelp av halveringsmetoden. Vi starter med intervallet $[a,b] = [0, 3.5]$, utfører 1000 iterasjoner og lar x betegne det siste estimatet for nullpunktet. Hva blir resultatet?

□ x nær $\sqrt{2}$ □ Metoden konvergerer ikke □ x nær 2 □ x nær 1
□ x nær 3

Med nær mener vi her at forskjellen er mindre en 0.01.

Oppgave 13. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og har konstante koeffisienter?

□ $x_{n+1} + nx_n = 1$ □ $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n^2 = 0$
□ $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = -\sin(x_n)$ □ $x_{n+2} + 4x_{n+1} + x_n = \sin(2^n)$
□ $x_{n+1} = n^2 x_n$

Oppgave 14. Differensligningen

$$2x_{n+2} - x_n = n^2$$

har en partikulærløsning

□ $x_n = n^2$ □ $x_n = n^2 - 3n + 4$ □ $x_n = -n^2$
□ $x_n = n^2 - 8n + 24$ □ $x_n = -n^2 - 4n + 12$

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser,

$$2x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Hva er løsningen?

□ $x_n = 2^{-n/2}\big(\cos(3n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)\big)$
□ $x_n = 3^{-n/2}\big(\cos(n\pi/2) + \sin(n\pi/2)\big)$ □ $x_n = 3^{-n} + (-2)^n/6$
□ $x_n = 2^{n/2}\big(\cos(3n\pi)\big)$ □ $x_n = 2^{n/2}\big(\cos(3n\pi/4) + \sin(3n\pi/4)\big)$

Oppgave 16. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi,

$$x_{n+1} = (n+1)^2 x_n, \quad n \geq 1, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

□ $x_n = n!$ □ $x_n = n$ □ $x_n = n^2$ □ $x_n = (n!)^2$
□ $x_n = \big((n-1)!\big)^2$

Oppgave 17. Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = 2^n, \quad n \geq 1$$

med startverdi $x_1 = 1$ har løsningen

□ $x_n = n$ □ $x_n = 3^{n-1}$ □ $x_n = 2^{n-1}$ □ $x_n = 3^n - 2^n$
□ $x_n = (3^n + 2^n)/5$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 18. Vi har skrevet et (korrekt) Javaprogram som simulerer differensligninger av første og andre orden ved hjelp av flyttall. For hvilket av problemene nedenfor får vi at den simulerte løsningen Java gir går mot null når $n \to \infty$?

☐ $x_{n+1} = 5x_n/2, \quad x_0 = 1/5$

☐ $12x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

☐ $x_{n+1} - x_n = 1/(1+n^2), \quad x_0 = 0$

☐ $6x_{n+2} - 35x_{n+1} - 6x_n = 0, \quad x_0 = 6, \quad x_1 = -1$

☐ $x_{n+2} - 16x_n = -1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -1$

Oppgave 19. En andreordens differensligning har den generelle løsningen

$$x_n = C_1 + C_2 8^n, \quad n \geq 0.$$

Hva er differensligningen?

☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 8x_n = 0$ ☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} - 8x_n = 0$

☐ $x_{n+2} + 7x_{n+1} - 8x_n = 0$ ☐ $x_{n+2} + 9x_{n+1} + 8x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 8x_n = 0$

Oppgave 20. Vi lar P_n betegne påstanden

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle heltall $n \geq 2$ kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_2 er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_2, \ldots, P_k$ er sanne, for å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at P_{k+1} også er sann. Siden P_k er sann har vi

$$\begin{aligned} 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{1}{2}k(k+1) + k + 1 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1 \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Vi ser dermed at om P_k er sann så må også P_{k+1} være sann.
Hvilket av følgende utsagn er sanne?

☐ Påstanden P_n er sann, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er feil, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

☐ Påstanden P_n er feil, og både del 1 og del 2 av induksjonsbeviset er feil

☐ Både påstanden P_n og induksjonsbeviset er riktige

☐ Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!!