UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 11. oktober 2007.
Tid for eksamen:	9:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

Oppgave- og svarark

Oppgave 1. Det binære tallet 1010101 er det samme som det desimale tallet

☐ 129 ☐ 15 ☐ 69 ☐ 85 ☐ 20201

Oppgave 2. I åttetallsystemet blir det desimale tallet 367

☐ 581 ☐ 557 ☐ 10010111 ☐ 11233 ☐ 4267

Oppgave 3. Desimaltallet 0.3 kan skrives på binær form som

☐ 0.1111

☐ 0.010011

☐ 0.10101

☐ 1.1

☐ krever uendelig mange binære siffer

Oppgave 4. Tallet $(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3$, der i er den imaginære enheten, er

☐ et irrasjonalt tall

☐ et rent imaginært tall

☐ et naturlig tall

☐ et komplekst tall der både real- og imaginærdel er ulik null.

☐ et rasjonalt tall.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. En mengde er definert ved $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 5\}$. Hvilket utsagn er riktig?

☐ Største nedre skranke er $\sqrt{5}$.

☐ Mengden har ingen øvre skranke.

☐ Kompletthetsaksiomet gjelder ikke siden mengden bare består av hele tall.

☐ Største nedre skranke er 2.

☐ Mengden har verken øvre eller nedre skranker.

Oppgave 6. Vi multipliserer ut uttrykket $(2-b)^{16}$. Hva blir da koeffisienten foran b^{14}?

☐ -120 ☐ -16 ☐ 480 ☐ -480 ☐ 120

Oppgave 7. Et av de følgende utsagn er feil; hvilket?

☐ Alle heltall er elementer i $\mathbb{C}$.

☐ Vi kan alltid tilnærme et komplekst tall, vilkårlig godt, med rasjonale tall.

☐ De rasjonale tallene oppfyller alle 11 aksiomer for reelle tall, unntatt ett.

☐ $\sqrt{n}$, der n er et naturlig tall, er enten et naturlig tall eller et irrasjonalt tall.

☐ I numeriske beregninger på en datamaskin opererer vi bare med et endelig antall ulike tall.

Oppgave 8. Vi definerer tallmengden $A = \{x_n\}$, for $n \geq 0$, der x_n er gitt rekursivt ved $x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_n)$. Ett av følgende utsagn om A er sant

☐ $\sup A = 1$ ☐ $\inf A = 1$ ☐ $\sup A = \frac{3}{2}$ ☐ $\inf A = 0$ ☐ A er ikke begrenset

Oppgave 9. Hvilken av de følgende differensligningene er lineær og homogen?

☐ $x_{n+1} + \log|x_n| = 0$

☐ $x_{n+2} - 9nx_{n+1} + x_n^2 - 2 = 0$

☐ $x_{n+2} - (n+1)x_{n+1} + nx_n - \sin(x_n) = 0$

☐ $x_{n+1} + (-1)^n x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 4(x_{n+1} + 1)x_n = 0$

Oppgave 10. Vi diskuterer metoder for å finne løsninger av likningen $f(x) = 0$, der f er en kontinuerlig funksjon, i intervallet $[a, b]$. Hvilket av de følgende utsagn er korrekt?

☐ Dersom $f(x)$ er et polynom av grad 4 eller høyere, finnes det bare numeriske løsninger.

☐ Halveringsmetoden gir en løsning bare dersom det bare er ett nullpunkt i $[a, b]$.

☐ Sekantmetoden kan bare brukes når $f(x)$ har ulikt fortegn i $x = a$ og $x = b$.

☐ Dersom den virker, konvergerer Newtons metode raskere enn halveringsmetoden.

☐ Newtons metode vil alltid konvergere når f er deriverbar overalt.

Oppgave 11. Taylorpolynomet $T_3 f(x)$, av grad 3 om punktet null, for funksjonen $f(x) = \sin x - \sin 2x$ blir?

☐ $x - \frac{2}{6}x^3$ ☐ $-x + \frac{7}{6}x^3$ ☐ $-x$ ☐ $-x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^3$ ☐ $-x + \frac{8}{6}x^3$

Oppgave 12. Kondisjonstallet $\kappa(f; a) = \left|\frac{af'(a)}{f(a)}\right|$ beskriver relativ økning av feilen fra argumentet a til den beregnede funksjonsverdien $f(a)$. Vi skal beregne $f(x) = (x-10)^{10}$ for $x = 10.01$ i Python. Hvor mange desimale siffer mister vi i svaret i hht. kondisjonstallet?

☐ 10 ☐ 0 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 13. Differensligningen

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 2^n$$

har en partikulærløsning

☐ $x_n = n2^n$ ☐ $x_n = -n2^{n-2}$ ☐ $x_n = -n^2$ ☐ $x_n = 2^n$ ☐ $x_n = n^2 2^n$

Oppgave 14. Vi har gitt en differensligning med initialbetingelser

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Hva er løsningen?

☐ $x_n = 3^{-n}$

☐ $x_n = \sin(n\pi/2)$

☐ $x_n = -3^n + 2^{n+1}$

☐ $x_n = 3^n - 2^n$

☐ $x_n = 1$

Oppgave 15. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdi:

$$x_{n+1} = \sin(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1.$$

Hvilket av de følgende utsagn er sant?

☐ Likningen er ikkelineær og har ingen løsning

☐ $x_n = e^{\sin n}$

☐ $x_n = \sin^n 1$

☐ x_n vokser over alle grenser når n øker

☐ Mengden av elementene i følgen $\{x_n\}$ har en største nedre skranke

Oppgave 16. Differensligningen

$$x_{n+1} + 2x_n = 3n, \quad n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 0$ har løsningen

☐ $x_n = n$

☐ $x_n = \frac{2^n}{3} + n - \frac{1}{3}$

☐ $x_n = \frac{(-2)^n}{3} + n - \frac{1}{3}$

☐ $x_n = 2^n + n$

☐ $x_n = (3^n - 2^n) + n$

Oppgave 17. En lineær, homogen, andreordens differensligning med konstante koeffisienter, har den generelle løsningen

$$x_n = (C_1 + C_2 n)3^n, \quad n \geq 0.$$

Hva er differensligningen?

☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} + 8x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 9x_{n+1} - 8x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$

☐ $x_{n+2} + 9x_{n+1} + 6x_n = 0$

☐ $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 18. $T_{11}f(x)$ for $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, om punktet null, er

☐ $\sum_{k=0}^{5} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ☐ $\sum_{k=0}^{11} (-1)^k \frac{x^k}{k}$ ☐ $\sum_{i=1}^{6} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$

Oppgave 19. Hvilken av følgende funksjoner har Taylorpolynomet $T_3 f(x) = x + \frac{1}{2}x^2$ om $x = 0$?

☐ $x \cos x$ ☐ $1 + \sin x - \cos x$ ☐ $x + \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$ ☐ $\sin x$ ☐ $\sin x + \frac{1}{2}x^2$

Oppgave 20. For $f(x) = \frac{1}{1-x}$ har vi Taylorpolynomet $T_n f(x) = 1 + x + x^2 + .. + x^n$ (skal ikke vises). Hva er den minste verdien av n fra lista under som gir $|f(\frac{1}{4}) - T_n f(\frac{1}{4})| < 0.005$?

☐ 7 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 11 ☐ 4

Det var det!!