# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Deleksamen i: | MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger. |
| Eksamensdag: | Onsdag 9. oktober 2013. |
| Tid for eksamen: | 15:00 – 17:00. |
| Oppgavesettet er på 6 sider. | |
| Vedlegg: | Formelark. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

**NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!**

### Oppgaveark

**Oppgave 1.** Det desimale tallet 165 representeres i totallssystemet som

**A:** $1011\ 0101_2$

**B:** $1110\ 0101_2$

**C:** $1010\ 0100_2$

**D:** $1010\ 0111_2$

**E:** $1010\ 0101_2$

**Oppgave 2.** Skrevet i totallssystemet blir det heksadesimale tallet $a7.5d_{16}$

**A:** $1010\ 0111.1101\ 1101_2$

**B:** $1010\ 0111.0101\ 1101_2$

**C:** $1110\ 0111.0101\ 1101_2$

**D:** $1010\ 1111.0101\ 1101_2$

**E:** $1011\ 0111.0101\ 1111_2$

*(Fortsettes på side 2.)*

**Oppgave 3.** Det rasjonale tallet 3/5 kan skrives i 2-tallsystemet som

**A:** $0.1001\ 1001\ 1001\cdots_2$ der sifrene 1001 gjentas uendelig mange ganger

**B:** $0.011_2$

**C:** $0.11_2$

**D:** $0.0101\ 0101\ 0101\cdots_2$ der sifrene 01 gjentas uendelig mange ganger

**E:** $0.1101\ 1101\ 1101\cdots_2$ der sifrene 1101 gjentas uendelig mange ganger

**Oppgave 4.** Det oktale tallet $56.27_8$ representeres i totallsystemet som

**A:** $11\ 0110.0101\ 11_2$

**B:** $10\ 1110.1101\ 11_2$

**C:** $10\ 1110.0101\ 11_2$

**D:** $10\ 1010.0111\ 11_2$

**E:** $10\ 1010.0101\ 01_2$

**Oppgave 5.** Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

**A:** Det rasjonale tallet 65/81 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet

**B:** Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 3-tallsystemet

**C:** Det rasjonale tallet 5/12 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 2-tallsystemet

**D:** Både 1/7 og 1/8 kan representeres med endelige sifferutviklinger i 60-tallsystemet

**E:** Hvis vi bruker 128 bits flyttall får vi aldri problemer med avrundingsfeil

**Oppgave 6.** Tallet

$$\frac{\sqrt{32}-1}{\sqrt{2}+1}$$

er det samme som

**A:** $\sqrt{32}-3$

**B:** $\sqrt{8}+5$

**C:** $0$

**D:** $9-5\sqrt{2}$

**E:** $\sqrt{32}+1$

**Oppgave 7.** Hva er minste øvre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - 2 < 0\}?$$

**A:** $2$

**B:** $6$

**C:** $2^{1/6}$

**D:** $1$

**E:** $\sqrt{2}$

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 8.** Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = x^5 + 3x - 1$?

**A:** $-1 + 3x + 2x^2$

**B:** $-1 + 2x$

**C:** $-1 + 3x - x^2$

**D:** $-1 + 3x + x^2$

**E:** $-1 + 3x$

**Oppgave 9.** Hvilken av følgende differensligninger er lineær?

**A:** $x_{n+1}^2 - x_n = n$

**B:** $x_{n+3} - nx_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = \sin n$

**C:** $x_{n+2} - \sin x_n = 3^n$

**D:** $x_{n+2} - x_{n+1}\ x_n = 1$

**E:** $x_{n+2}x_{n+1} - x_n = n$

**Oppgave 10.** For hvilken av følgende verdier av $c$ blir Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = cx + e^{-x/c}$ lik $1 + x^2/2$?

**A:** $c = 3$

**B:** $c = 1/2$

**C:** $c = -1$

**D:** $c = 2$

**E:** $c = -2$

**Oppgave 11.** Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = \pi/2$ for funksjonen $f(x) = \sin x$?

**A:** $x - x^3/6$

**B:** $1 - (x - \pi/2)^2/2$

**C:** $1 + (x - \pi/2)^2/2$

**D:** $1 - (x - \pi/2)^2/3$

**E:** $1 + x^2$

**Oppgave 12.** For hvilken verdi av $\beta$ har vi at $100_\beta = 10_{4\beta}$, med andre ord at 100 i $\beta$-tallsystemet er lik 10 i $4\beta$-tallsystemet?

**A:** $\beta = 8$

**B:** $\beta = 6$

**C:** $\beta = 5$

**D:** $\beta = 4$

**E:** $\beta = 2$

*(Fortsettes på side 4.)*

**Oppgave 13.** Vi tilnærmer funksjonen $f(x) = e^x$ med sitt Taylor-polynom av grad $n$ om $a = 0$. Hva er minste verdi av $n$ som gjør at den absolutte feilen i tilnærmingen er mindre enn 0.001 for alle $x$ i intervallet $[-1, 0]$?

**A:** $n = 3$

**B:** $n = 4$

**C:** $n = 5$

**D:** $n = 6$

**E:** $n = 7$

**Oppgave 14.** Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for negative flyttall med stor absoluttverdi?

**A:** $x^2 + x^4$

**B:** $x + e^x$

**C:** $x + \sin x$

**D:** $1 + x^2$

**E:** $\sqrt{x^2 + 2} + x$

**Oppgave 15.** Differensligningen

$$x_{n+1} - 3x_n = n, \ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 0$ har løsningen

**A:** $x_n = (3^n - 2n - 1)/4$

**B:** $x_n = (3^n + 2n - 1)$

**C:** $x_n = (3^n - 1)/2$

**D:** $x_n = (3^n + 3n - 1)/6$

**E:** $x_n = 3^n - 1$

**Oppgave 16.** En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^n + D3^{-n}.$$

Hva kan da ligningen være?

**A:** $3x_{n+2} - 7x_{n+1} - 2x_n = 0$

**B:** $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

**C:** $3x_{n+2} + 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

**D:** $3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = 0$

**E:** $3x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = 0$

*(Fortsettes på side 5.)*

**Oppgave 17.** Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1,\ x_1 = -2/3.$$

Hva er løsningen?

**A:** $x_n = 1 - 5n3^{n-2}$

**B:** $x_n = 2^n - 8n/3$

**C:** $x_n = 3^n - 11n2^{n-1}/3$

**D:** $x_n = 2^n - 8n3^{n-2}$

**E:** $x_n = 2^{n+1} - 3^n$

**Oppgave 18.** Vi har differensligningen

$$3x_{n+2} - 5x_{n+1} = 1/7, \quad x_1 = -1/14$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store $n$ vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

**A:** 0

**B:** $-1/14$

**C:** $(5/3)^n$

**D:** overflow

**E:** 1

**Oppgave 19.** Vi har differensligningen

$$5x_{n+2} - 16x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

For hvilket par av startverdier vil den eksakte løsningen forbli begrenset mens den simulerte løsningen (med 64 bits flyttall) vil gi overflow?

**A:** $x_0 = 1, \quad x_1 = 1$

**B:** $x_0 = 0, \quad x_1 = 1/3$

**C:** $x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

**D:** $x_0 = 1, \quad x_1 = 1/5$

**E:** $x_0 = 1, \quad x_1 = 2/5$

*(Fortsettes på side 6.)*

**Oppgave 20.** For hvert naturlig tall $n$ lar vi $P_n$ betegne påstanden

$$P_n: \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Et induksjonsbevis for at $P_n$ er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at $P_1$ er sann.

2. Anta nå at vi har bevist at $P_1, \ldots, P_k$ er sanne. For å fullføre induksjonsbeviset, må vi vise at da er også $P_{k+1}$ sann. Vi ser at

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

   Dermed stemmer formelen også for $n = k+1$ om den stemmer for $n = k$, så påstanden $P_n$ er sann for alle naturlige tall $n$.

Hvilket av følgende utsagn er sant?

**A:** Påstanden $P_n$ er sann for $n \geq 1$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

**B:** Påstanden $P_n$ er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

**C:** Påstanden $P_n$ er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

**D:** Påstanden $P_n$ er riktig for alle $n \geq 1$ og induksjonsbeviset er riktig

**E:** Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

*Det var det!*