UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Onsdag 8. oktober 2014.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres på eget svarark.

De 10 første oppgavene teller 2 poeng hver, de siste 10 teller 3 poeng hver. Den totale poengsummen er altså 50. Det er 5 svaralternativer for hvert spørsmål, men det er bare ett av disse som er riktig. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på et spørsmål, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" med minuspoeng for å svare feil. *Lykke til!*

NB. Husk å sjekke at du har ført inn svarene riktig på svararket!

Oppgaveark

Oppgave 1. Det desimale tallet 154 representeres i totallssystemet som

A: $1001\ 1110_2$

B: $1011\ 1010_2$

C: $1101\ 1010_2$

D: $1001\ 1010_2$

E: $1011\ 1011_2$

Oppgave 2. I 16-tallsystemet blir det binære tallet $1010\ 0010.11_2$ skrevet som

A: $c2.3_{16}$

B: $a2.c_{16}$

C: $a2.3_{16}$

D: $c2.c_{16}$

E: $c4.c_{16}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Det binære tallet $10\ 1001_2$ representerer det desimale tallet

A: 41

B: 31

C: 37

D: 43

E: 39

Oppgave 4. Det rasjonale tallet 17/32 kan skrives i 2-tallsystemet som

A: $0.1101\ 1101\ 1101 \cdots_2$ der sifrene 1101 gjentas uendelig mange ganger

B: $0.1000\ 1_2$

C: $0.1000\ 01_2$

D: $0.1101\ 1101_2$

E: $0.1011\ 0011\ 0011 \cdots_2$ der sifrene 0011 gjentas uendelig mange ganger

Oppgave 5. Det binære tallet $11\ 0100\ 1001_2$ representeres i 8-tallsystemet som

A: 1571_8

B: 1631_8

C: 1421_8

D: 1301_8

E: 1511_8

Oppgave 6. Kun ett av følgende utsagn er sant, hvilket?

A: Det rasjonale tallet 65/29 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 6-tallsystemet

B: Det rasjonale tallet 5/14 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 7-tallsystemet

C: Det rasjonale tallet 5/14 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 2-tallsystemet

D: Både 1/7 og 1/8 kan representeres med endelige sifferutviklinger i 112-tallsystemet

E: Det rasjonale tallet 5/30 kan representeres med en endelig sifferutvikling i 15-tallsystemet

Oppgave 7. Hva er minste øvre skranke for mengden

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x < 2\}?$$

A: -4

B: -2

C: 1

D: 4

E: $\sqrt{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. For hvilken verdi av β har vi at $110_\beta = 36_{2\beta}$, med andre ord at 110 i β-tallsystemet er lik 36 i siffersystemet med grunntall 2β?

A: $\beta = 2$

B: $\beta = 5$

C: $\beta = 6$

D: $\beta = 7$

E: $\beta = 8$

Oppgave 9. Subtraksjonen $434_{16} - 152_{16}$ (der begge tallene er representert i 16-tallsystemet) gir som resultat

A: $2e6_{16}$

B: $1f2_{16}$

C: $2e2_{16}$

D: 274_{16}

E: 282_{16}

Oppgave 10. For hvilke enkodinger vil særnorske bokstaver (som æ, ø, å) kodes med en byte?

A: ASCII og UTF-32

B: ISO Latin 1

C: ISO Latin 1 og UTF-8

D: UTF-16

E: ASCII og UTF-16

Oppgave 11. Anta at vi har en datamaskin som representerer tall på normalform i 10-tallsystemet, med 4 siffer for signifikanden og 1 siffer for eksponenten. Addisjonen $47.11 + 56.22$ vil da gi resultatet

A: 103.4

B: 104

C: 103

D: 103.33

E: 103.3

Oppgave 12. Hvilket av følgende uttrykk vil gi stor relativ feil om det evalueres for svært store positive flyttall?

A: $\ln(x^2) + \ln(x)$

B: $x - e^x$

C: $x - \sin x$

D: $\sqrt{x^2 + x} - x$

E: $x^4 - x^2$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 13. Vi skal se på tallet $0.1100\,1100\,1100_2$ i totallssystemet. Hvis vi runder av dette tallet til 6 binære siffer blir den absolutte feilen

A: $\frac{3}{1024}$
B: $\frac{1}{1024}$
C: $\frac{5}{1024}$
D: $\frac{1}{256}$
E: $\frac{3}{256}$

Oppgave 14. Hvilken av følgende differensligninger er lineær med konstante koeffisienter?

A: $x_{n+1}^2 + 2x_n = 3$
B: $x_{n+2} + x_{n+1}\ x_n = 1$
C: $x_{n+3} - \sin n x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = \cos n$
D: $x_{n+2} + nx_{n+1} - x_n = 4$
E: $x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n = \sin n$

Oppgave 15. Differensligningen

$$x_{n+1} + 2x_n = 3n,\ n \geq 0$$

med startverdi $x_0 = 1$ har løsningen

A: $x_n = \frac{4}{3}(-2)^n + n + \frac{1}{3}$
B: $x_n = \frac{4}{3}2^n + n - \frac{1}{3}$
C: $x_n = n - \frac{1}{3}$
D: $x_n = (-2)^n$
E: $x_n = \frac{4}{3}(-2)^n + n - \frac{1}{3}$

Oppgave 16. En annenordens lineær og homogen differensligning med konstante koeffisienter har den generelle løsningen

$$x_n = C2^{-n} + D(-4)^n.$$

Hva kan da ligningen være?

A: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} - 4x_n = 0$
B: $2x_{n+2} + 7x_{n+1} + 4x_n = 0$
C: $x_{n+2} + 7x_{n+1} - 2x_n = 0$
D: $3x_{n+2} + 7x_{n+1} + 4x_n = 0$
E: $2x_{n+2} - 7x_{n+1} - 4x_n = 0$

Oppgave 17. Vi har gitt en differensligning med tilhørende startverdier,

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 5,\ x_1 = 10.$$

Hva er løsningen?

A: $x_n = 2 + 3 \cdot 2^n - n2^n$
B: $x_n = 2 + 3 \cdot 2^n$
C: $x_n = 2 + 3 \cdot 2^n + n2^n$
D: $x_n = 5 \cdot 2^n$
E: $x_n = 5$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 18. Vi har differensligningen

$$5x_{n+1} - x_n = 1/3, \quad n \geq 0, \quad x_0 = 1/12$$

og simulerer denne med 64-bits flyttall på datamaskin. For tilstrekkelig store n vil da den beregnede løsningen $\bar{x}_n$ gi som resultat

A: verdier nær 1/12, men aldri eksakt 1/12

B: 1/12

C: 5^{-n}

D: overflow

E: 0

Oppgave 19. Vi har differensligningen

$$3x_{n+2} - 10x_{n+1} + 3x_n = 0, \quad n \geq 0.$$

For hvilket par av startverdier vil den eksakte løsningen forbli begrenset mens den simulerte løsningen (med 64 bits flyttall) vil gi overflow?

A: $x_0 = 1, \quad x_1 = 3$

B: $x_0 = 0, \quad x_1 = 1$

C: $x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

D: $x_0 = 2, \quad x_1 = 6$

E: $x_0 = 1, \quad x_1 = 1/3$

Oppgave 20. Vi lar $\{x_n\}$ være løsningen av differenslikningen

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \quad \text{for } n \geq 1, \quad x_1 = 3,\ x_2 = 1.$$

For hvert naturlig tall n lar vi P_n betegne påstanden

$$P_n : \ x_n \leq 2^n.$$

Et induksjonsbevis for at P_n er sann for alle naturlige tall kan være som følger:

1. Vi ser lett at P_1 og P_2 er sanne.
2. Anta nå at vi har bevist at P_n er sann for $n = 1, 2, \ldots, k$. For å fullføre induksjonsbeviset må vi vise at da er også P_n sann for $n = k + 1$. Vi ser at

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + x_{k-1} \\ &\leq 2^k + 2^{k-1} \\ &= 2^{k+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \\ &= 2^{k+1} \cdot \frac{3}{4} \leq 2^{k+1}. \end{aligned}$$

   Dermed stemmer formelen også for $n = k+1$, så påstanden P_n er sann for alle naturlige tall n.

(Fortsettes på side 6.)

Hvilket av følgende utsagn er sant?

A: Påstanden P_n er sann for $n \geq 1$, men del 2 av induksjonsbeviset er feil

B: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 2 av induksjonsbeviset er feil

C: Påstanden P_n er ikke sann for alle $n \geq 1$, og del 1 av induksjonsbeviset er feil

D: Påstanden P_n er riktig for alle $n \geq 1$ og induksjonsbeviset er riktig

E: Beviset er riktig, men det er ikke noe induksjonsbevis

Det var det!