UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger — del 1
Eksamensdag:	Tirsdag 7. desember 2004
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30
Oppgavesettet er på 9 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Løsningsforslag

Merk at dette er et forslag til løsning. Flere av oppgavene kan løses på andre måter, og har du gjort det riktig får du fullt hus, selv om du ikke har brukt metoden jeg har vist her. Forøvrig gjelder det vanlige forbeholdet om trykkfeil.

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 3 til funksjonen $f(x) = e^x - 1 - x$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

☐ $1 + x + x^2/2 + x^3/6$ ☐ $x + x^2 + x^3/6$ ☐ $1 + x + x^2/2$

☐ $-1 - x^2/2$ ☑ $x^2/2 + x^3/6$

Løsning. Funksjonen f er dannet ved å trekke de to første leddene i Taylorpolynomet til e^x fra e^x. Alternativ (5) er derfor riktig.

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = x^2$ om punktet $a = 0$ er gitt ved

(Fortsettes på side 2.)

☐ $1+x+x^2$ ☑ x^2 ☐ x^3 ☐ $-x^2$ ☐ $1+x/2+x^2/3$

Løsning. Taylorpolynomet av grad 2 til et polynom p av grad 2 er lik p så svaret er x^2. Dette får vi også om vi regner ut siden $f(0) = f'(0) = 0$, mens $f''(0) = 2$.

Oppgave 3. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = \sqrt{1+x}$ om punktet $a = 0$ er

☐ 0 ☑ $-1/8$ ☐ $1/3$ ☐ $-1/2$ ☐ $1/12$

Løsning. Vi skriver $f(x) = (1+x)^{1/2}$ og finner at $f''(x) = -(1+x)^{-3/2}/4$. Siden det tredje leddet i Taylors formel er $(x-a)^2 f''(a)/2$ og $a = 0$ ser vi at riktig svar blir $-1/8$.

Oppgave 4. Vi tilnærmer en funksjon $f(x)$, som kan deriveres vilkårlig mange ganger, med et Taylorpolynom $T_n f(x)$ av grad n, utviklet om a. Vi betrakter restleddet

$$R_n f(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$. Hvilket av følgende utsagn er sant?

☐ For alle f vil restleddet gå mot 0 når $n \to \infty$

☐ Ikke for noen f vil restleddet gå mot 0 når $n \to \infty$

☐ For alle f vil restleddet gå mot ∞ når $x \to -\infty$

☐ Restleddet vil gå mot 1 når $x \to \pi$

☑ For alle f vil restleddet gå mot 0 når $x \to a$

Løsning. Her vil noen kanskje fristes til å velge alternativ 1, men det fins mange funksjoner med egenskapen at restleddet *ikke* går mot 0 når $n \to \infty$. Årsaken er at $f^{(n+1)}(a)$ kan avhenge av n og kansellere $(n+1)!$ i nevneren. Et eksempel er funksjonen $f(x) = \ln(1+x)$ utviklet om $a = 0$.

Oppgave 5. Vi har påstanden P: Det fins alltid nøyaktig ett polynom p_n av grad n som tilfredstiller betingelsene $p_n(x_i) = y_i$ for $i = 0, 1, \ldots, m$, der $(x_i)_{i=0}^m$ og $(y_i)_{i=0}^m$ er reelle tall slik at $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$. Påstanden P er sann hvis

☑ $m = n$ ☐ $m = 1$ ☐ $m < n$ ☐ $m = 0$ ☐ $m > n$

Løsning. Antall punkter må være en større enn graden til polynomet vi skal interpolere med for at det hele alltid skal gå i hop. Siden nummereringen av punktene begynner på 0 er riktig svar at $n = m$.

Oppgave 6. Anta at vi bruker trapesregelen til å beregne en tilnærming T til $\int_0^1 f(x)\,dx$, og at vi ser bort fra avrundingsfeil. Da er $T = \int_0^1 f(x)\,dx$ hvis

☐ f er en parabel ☐ $f(x) = \sin x$ ☐ $f(x) = e^x$

(Fortsettes på side 3.)

☑ f er en rett linje ☐ f er et polynom av grad tre

Løsning. Trapesregelen er basert på å interpolere f med en rett linje på hvert delintervall. Hvis f selv er en rett linje, vil feilen i denne tilnærmingen bli null. Dermed vil også feilen i trapesformelen bli 0.

Oppgave 7. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

☐ $y'' + \sin y = x$ ☑ $y' + x^2 y = 1$ ☐ $y' + y^2 = 0$

☐ $y'' + y' = \ln y$ ☐ $y' + 1/y = 2$

Løsning. Her er det ikke så mye å si annet enn at alternativ 2 er riktig.

Oppgave 8. Differensialligningen $(1 + x^2)y' = y$ har den generelle løsningen

☑ $y(x) = Ce^{\arctan x}$ ☐ $y(x) = Ce^{1+x^2}$ ☐ $y(x) = C/(1 + x^2)$

☐ $y(x) = C \sin(1 + x^2)$ ☐ $y(x) = \cos x$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Ligningen kan separeres ved å dividere med $y(1 + x^2)$ på begge sider, og blir da $y'/y = 1/(1+x^2)$. Vi løser så ved å integrere på begge sider. På venstre side får vi

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{dy}{y} = \ln |y|.$$

På høyre side får vi

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x.$$

Altså er løsningen gitt ved $\ln |y| = \arctan x + C'$ for en vilkårlig konstant C'. Vi anvender eksponensialfunksjonen på begge sider og får

$$|y(x)| = e^{C'} e^{\arctan x}.$$

Vi kan skrive løsningen som $y(x) = Ce^{\arctan x}$ for en vilkårlig konstant C ved å ta tallverdien inn i C og legge merke til at $y(x) = 0$ også er en løsning.

Oppgave 9. Differensialligningen $y'' - 4y' + y = 0$ har den generelle løsningen

☐ $y(x) = e^{2x}(C \sin \sqrt{3}x + D \cos \sqrt{3}x)$ ☐ $y(x) = Ce^{2x} + De^{\sqrt{3}x}$

☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ ☑ $y(x) = Ce^{(2-\sqrt{3})x} + De^{(2+\sqrt{3})x}$

☐ $y(x) = Ce^{(3+\sqrt{2})x} + De^{(3-\sqrt{2})}x$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.

Løsning. Den karaktertistiske ligningen er $z^2 - 4z + 1 = 0$ som har løsningene $r_1 = 2 - \sqrt{3}$ og $r_2 = 2 + \sqrt{3}$. Alternativ (4) er derfor riktig.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Differensialligningen $y' + y/x = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

☐ $y(x) = x^2 + C$ ☐ $y(x) = x^2 + C/x$ ☐ $y(x) = x^3 + C$

☐ $y(x) = x + C/x$ ☑ $y(x) = x^3/4 + C/x$

der C er et vilkårlig, reelt tall.

Løsning. Den integrerende faktoren er $e^{\int dx/x} = x$. Vi multipliserer med denne på begge sider og får ligningen

$$xy' + y = (xy)' = x^3.$$

Vi integrerer begge sider, noe som gir

$$xy(x) = \frac{x^4}{4} + C,$$

der C er en vilkårlig konstant. Ved å dividere med x på begge sider får vi alternativ (5).

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Merk også at oppgavene ikke bygger på hverandre. I oppgavene 1, 3 og 4 er det derfor mulig å løse deloppgave b selv om du ikke har løst deloppgave a.

Oppgave 1.

a) Løs differensialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

med intitalverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Løsning. Vi finner først den generelle løsningen til den homogene ligningen. Den karakteristiske ligningen er

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

som har løsningene $r_1 = -1$ og $r_2 = 3$. Den generelle løsningen av ligningen er derfor

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{3x}$$

der C og D er vilkårlige reelle tall.

Vi må så tilpasse C og D til startverdiene. Siden $y'(x) = -Ce^{-x} + 3De^{3x}$, får vi $0 = y(0) = C + D$ og $1 = y'(0) = -C + 3D$. Løsningen av dette systemet er $C = -1/4$ og $D = 1/4$. Løsningen av differensialligningen med startverdier er derfor

$$y(x) = \frac{1}{4}(e^{3x} - e^{-x}).$$

(Fortsettes på side 5.)

b) Løs differensialligningen

$$y'' - 2y' - 3y = -x$$

med intitialverdiene $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

Løsning. Den generelle løsningen til den homogene ligningen fant vi i (a). I tillegg trenger vi en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. Siden høyresiden er et førstegradspolynom, prøver vi med en løsning på formen $y_p(x) = Ax + B$. Vi setter inn i ligningen og får

$$-x = y_p'' - 2y_p' - 3y_p = 0 - 2A - 3(Ax + B) = -3Ax - (2A + 3B).$$

Skal dette holde som en likhet for alle x, må koeffiesientene foran x på hver side være like, og konstantleddene på hver side må være like. Dette gir $-3A = -1$ og $2A + 3B = 0$ som har løsningen $A = 1/3$ og $B = -2/9$. En partikulær løsning er derfor $y_p(x) = x/3 - 2/9$. Den generelle løsningen av den inhomogene ligningen er derfor

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{3x} + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}.$$

Til slutt må vi tilpasse konstantene C og D til startverdiene. Siden $y'(x) = -Ce^{-x} + 3De^{3x} + 1/3$, får vi $0 = y(0) = C + D - 2/9$ og $1 = y'(0) = -C + 3D + 1/3$. Løser vi disse ligningene, får vi $C = 0$ og $D = 2/9$. Løsningen av den inhomogene ligningen med startverdier er derfor

$$y(x) = \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{x}{3} - \frac{2}{9}.$$

Oppgave 2. Vis ved induksjon at

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

for alle heltall $n \geq 0$ og alle relle tall $a \neq 1$.

Løsning. Vi sjekker først at formelen stemmer for $n = 0$. Da er venstresiden

$$\sum_{i=0}^{0} a^i = 1$$

(strengt tatt bare sant om $a \neq 0$, men dette tilfellet er jo lett å sjekke separat), mens høyresiden er

$$\frac{1 - a}{1 - a} = 1,$$

altså stemmer formelen i dette tilfellet.

Vi antar så at formelen stemmer for $n = k \geq 0$, og må vise at den da også stemmer for $n = k + 1$, altså at

$$\sum_{i=0}^{k+1} a^i = \frac{1 - a^{k+2}}{1 - a}.$$

(Fortsettes på side 6.)

Vi utnytter at formelen er kjent for $n = k$ og får

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} a^i = \sum_{i=0}^{k} a^i + a^{k+1} &= \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} \\ &= \frac{1-a^{k+1}+a^{k+1}-a^{k+2}}{1-a} \\ &= \frac{1-a^{k+2}}{1-a}\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise. Altså kan vi konkludere med at formelen stemmer for alle $n \geq 0$.

Oppgave 3. Tom har et akvarium der vannet har blitt for hardt, dvs. at konsentrasjonen av salter er for stor. Denne konsentrasjonen måles i gram per liter, g/ℓ, og har kommet opp i $c_0 = 1.0\,g/\ell$. Av hensyn til sine kjære dyr og planter, kan ikke Tom bytte alt vannet på en gang, men må nøye seg med å bytte S liter en gang i uka. Dette gjør han ved å tappe S liter vann fra akvariet og deretter fylle på med S liter vann fra springen. Vi ser bort fra fordampning etc.

a) Forklar hvorfor konsentrasjonen av salter etter n uker, c_n, er styrt av *differenslikningen*

$$c_n = \left(1 - \frac{S}{V}\right) c_{n-1} + \frac{S}{V} K,$$

der K er konsentrasjonen av salt i vannet i springen og V er det totale vannvolumet i akvariet, målt i liter.

Løsning. La s_n betegne antall gram med salter etter n uker. Når vi tar ut S liter med vann med en konsentrasjon på c_{n-1} av salter, fjerner vi $c_{n-1}S$ gram med salter. Vi legger dessuten til S liter vann med en konsentrasjon K av salter, altså KS gram med salter. Antall gram med salter i uke n er lik antall gram i uke $n-1$ fratrukket de $c_{n-1}S$ gram vi fjerner og tillagt de KS gram vi legger til,

$$s_n = s_{n-1} - Sc_{n-1} + SK.$$

Konsentrasjonen av salter etter n uker er gitt ved $c_n = s_n/V$. Vi dividerer med V på begge sider av likheten og får

$$c_n = \frac{s_n}{V} = \frac{s_{n-1}}{V} - \frac{S}{V}c_{n-1} + \frac{SK}{V} = \left(1 - \frac{S}{V}\right)c_{n-1} + \frac{S}{V}K.$$

b) Vi setter nå

$$K = 0.1 g/\ell, \quad V = 100.0\ell, \quad S = 10.0\ell$$

i tillegg til $c_0 = 1.0g/\ell$.
Løs differensligningen og finn et uttrykk for saltkonsentrasjonen etter n uker. Hvor mange uker går det før Tom får saltinnholdet ned til det halve av c_0, dvs. til $0.5g/\ell$?

Løsning. Setter vi inn tallene blir ligningen

$$c_n - \frac{9}{10}c_{n-1} = \frac{1}{100}.$$

(Fortsettes på side 7.)

Dette er en inhomogen, førsteordens differensligning. For å løse den homogene ligningen $c_n = 9c_{n-1}/10$, prøver vi med en løsning på formen $c_n = r^n$. Gjør vi det, ser vi at $r = 9/10$. Den generelle løsningen av den homogene ligningen er derfor

$$c_n = C\Big(\frac{9}{10}\Big)^n,$$

der C er en vilkårlig konstant. For å finne en partikulær løsning, prøver vi med en løsning på samme form som høyresiden, $c_n^p = A$, for en konstant A som vi må bestemme. Vi får da

$$A - \frac{9}{10}A = \frac{1}{100}$$

som har løsningen $A = 1/10$. Den generelle løsningen av differensligningen er derfor

$$c_n = C\Big(\frac{9}{10}\Big)^n + \frac{1}{10}.$$

Til slutt må vi tilpasse konstanten C til startverdien $c_0 = 1.0g/\ell$. Vi får

$$1 = c_0 = C + \frac{1}{10}$$

som gir $C = 9/10$. Løsningen er derfor

$$c_n = \frac{9}{10}\Big(\frac{9}{10}\Big)^n + \frac{1}{10} = \Big(\frac{9}{10}\Big)^{n+1} + \frac{1}{10}.$$

For å finne ut hvor lang tid det tar før konsentrasjonen er redusert til $0.5g/\ell$, løser vi ligninen $c_n = 1/2$ med hensyn på n, altså

$$\Big(\frac{9}{10}\Big)^{n+1} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$$

eller

$$\Big(\frac{9}{10}\Big)^{n+1} = \frac{2}{5}.$$

Tar vi logaritmer på begge sider og løser med hensyn på n får vi

$$n = \frac{\ln(2/5)}{\ln(9/10)} - 1 \approx 7.7.$$

Det tar altså 8 uker før konsentrasjonen blir mindre enn $0.5g/\ell$.

Oppgave 4.

a) Finn parabelen p som interpolerer funksjonen f i punktene $x = 0$, $x = h$ og $x = 2h$ (parabelen tilfredstiller altså betingelsene $p(0) = f(0)$, $p(h) = f(h)$ og $p(2h) = f(2h)$).
Deriver p og utled tilnærmingen $\delta(f)$ til $f'(0)$ gitt ved

$$f'(0) \approx \delta(f) = \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}.$$

Løsning. Vi skriver parabelen på formen

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x-h).$$

(Fortsettes på side 8.)

Interpolasjonsbetingelsene gir ligningene

$$\begin{aligned} f(0) &= p(0) = c_0, \\ f(h) &= p(h) = c_0 + c_1 h, \\ f(2h) &= p(2h) = c_0 + 2c_1 h + 2c_2 h^2. \end{aligned}$$

Fra den første ligningen får vi $c_0 = f(0)$, fra den andre $c_1 = \big(f(h) - f(0)\big)/h$ og fra den tredje

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{f(2h) - c_0 - 2c_1 h}{2h^2} = \frac{f(2h) - f(0) - 2h\dfrac{f(h) - f(0)}{h}}{2h^2} \\ &= \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2}. \end{aligned}$$

Altså er parabelen gitt ved formelen

$$p(x) = f(0) + \frac{f(h) - f(0)}{h} x + \frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2} x(x - h).$$

Den deriverte av p er

$$p'(x) = c_1 + c_2(2x - h).$$

Vi bruker $p'(0)$ som en tilnærming til $f'(0)$. Dette gir

$$\begin{aligned} f'(0) \approx p'(0) = c_1 - hc_2 &= \frac{f(h) - f(0)}{h} - h\frac{f(2h) - 2f(h) + f(0)}{2h^2} \\ &= \frac{2f(h) - 2f(0) - f(2h) + 2f(h) - f(0)}{2h} \\ &= \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h} = \delta(f) \end{aligned}$$

som er det vi skulle vise.

b) Vis at feilen i denne tilnærmingen er gitt ved

$$\big|f'(0) - \delta(f)\big| \leq h^2 \max_{x \in [0,2h]} \big|f'''(x)\big|.$$

Hint: I denne oppgaven kan du bruke at feilleddet i Taylors formel kan skrives

$$R_n f(x) = \frac{(x - a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!},$$

der ξ er et tall i intervallet $[a, x]$.

Løsning. Vi ser på feilen $\big|f'(0) - \delta(f)\big|$, men erstatter $f(h)$ og $f(2h)$ med Taylorpolynomer med feilledd opp til og med tredje grad, siden vi ser at det oppgitte feilestimatet går opp til f'''. Taylorutviklingene vi bruker er

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, h), \\ f(2h) &= f(0) + 2hf'(0) + 2h^2 f''(0) + \frac{4h^3}{3} f'''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (0, 2h). \end{aligned}$$

Vi skal sette dette inn i feilen

$$\big|f'(0) - \delta(f)\big| = \left|f'(0) - \frac{-f(2h) + 4f(h) - 3f(0)}{2h}\right|,$$

(Fortsettes på side 9.)

men la oss først forenkle uttrykket i telleren til $\delta(f)$. Vi får

$$\begin{aligned}
-f(2h)+4f(h)-3f(0) &= -f(0)-2hf'(0)-2h^2f''(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2) \\
&\qquad +4f(0)+4hf'(0)+2h^2f''(0)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1) \\
&\qquad -3f(0) \\
&= 2hf'(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1).
\end{aligned}$$

Setter vi dette inn i utrykket for feilen får vi

$$\begin{aligned}
\bigl|f'(0)-\delta(f)\bigr| &= \Bigl|f'(0)-\frac{-f(2h)+4f(h)-3f(0)}{2h}\Bigr| \\
&= \Bigl|f'(0)-\frac{2hf'(0)-\frac{4h^3}{3}f'''(\xi_2)+\frac{2h^3}{3}f'''(\xi_1)}{2h}\Bigr| \\
&= \Bigl|\frac{2h^2}{3}f'''(\xi_2)-\frac{h^2}{3}f'''(\xi_1)\Bigr| \\
&\le \frac{2h^2}{3}\bigl|f'''(\xi_2)\bigr|+\frac{h^2}{3}\bigl|f'''(\xi_1)\bigr| \\
&\le \Bigl(\frac{2h^2}{3}+\frac{h^2}{3}\Bigr)\max_{x\in[0,2h]}\bigl|f(x)\bigr| \\
&\le h^2\max_{x\in[0,2h]}\bigl|f(x)\bigr|
\end{aligned}$$

Lykke til og god jul!