UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger — løsningsforslag
Eksamensdag:	Onsdag 7. desember 2005.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.
Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 7 flervalgsoppgaver som teller 4 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 6 delspørsmålene 12 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Koeffisienten foran x^2 i Taylorpolynomet til funksjonen $f(x) = x^2 - \sin x$ utviklet om punktet $a = 0$ er

☐ 0 ☐ $-1/2$ ☐ -1 ☑ 1 ☐ $1/2$

Merknad: Taylorpolynomet for sinus ($T_3 \sin(x) = x - x^3/6$) har ingen like potenser. Eneste bidrag til ledd av orden 2 kommer da fra x^2.

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen $f(x) = e^{x^2}$ utviklet om punktet $a = 0$ er gitt ved

☑ $1 + x^2$ ☐ $1 + x + x^2/2$ ☐ $1 + x^2/2$ ☐ x^2
☐ $1 - x^2/2$

Merknad: Vi starter med Taylorpolynomet for e^x

$$T_2(e^x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

Taylorpolynomet for $f(x) = e^{x^2}$ finner vi ved å erstatte x med x^2. Da dobles

(Fortsettes på side 2.)

graden på polynomet slik at vi finner

$$T_4 f(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 \quad \rightarrow \quad T_2 f(x) = 1 + x^2.$$

Vi kunne altså nøyd oss med T_1 for e^x.
Naturligvis kan vi også regne ut de deriverte

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2} & \Rightarrow \quad f(0) &= 1 \\ f'(x) &= 2xe^{x^2} & \Rightarrow \quad f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} & \Rightarrow \quad f''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Så settes dette inn i formelen.

Oppgave 3. Hvilken av følgende differensialligninger er lineær?

☐ $y'' + \sin y = x$ ☑ $y' + y \sin x = 1$ ☐ $y' + y^{1/2} = 0$

☐ $y'' + y' = \cos y$ ☐ $y' + 1/y = 2$

Oppgave 4. Differensialligningen $y'' + 4y' + 5y = 0$ har den generelle løsningen

☑ $y(x) = e^{-2x}(C \sin x + D \cos x)$ ☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$

☐ $y(x) = Ce^{-2x} + De^{-x}$ ☐ $y(x) = C \cos x + D \sin x$

☐ $y(x) = e^{x}(C \sin 2x + D \cos 2x)$

der C og D er vilkårlige, reelle tall.
Merknad: Den karakteristiske likningen er $r^2 + 4r + 5 = 0$ som har to komplekse løsninger $r = -2 \pm i$. Da brukes nederste valg i klammeparantesen for formel i vedlegget. Noen har reagert på at C og D har byttet plass i forhold til formelen i vedlegget. Dette har ingen betydning siden disse er fritt valgbare reelle tall.

Oppgave 5. Differensialligningen $y' + x^2 y = x^2$, der $x > 0$, har løsningen

☐ $y(x) = x^2 + Ce^{-x^2}$ ☐ $y(x) = x^2 + Ce^{x}$ ☐ $y(x) = x^2 + C$

☐ $y(x) = x^3/3 + C$ ☑ $y(x) = 1 + Ce^{-x^3/3}$

der C er et vilkårlig, reelt tall.
Merknad: Her kan en regne på mange måter, gange med integrerende faktor slik som i Kalkulus, bruke formel fra Kalkulus dersom man husker den. Det enkleste er faktisk å sette inn.

Oppgave 6. Vi benytter Eulers metode for å finne numeriske løsninger av ligningen $y' = ay$. Dette gir en differensligning for $\{y_j\}$ der $y_j \approx y(jh)$, hvilken?

☐ $y_j = e^{ah} y_{j-1}$ ☐ $y_j = (1 + ah + \frac{1}{2}a^2h^2) y_{j-1}$ ☐ $y_j = y_{j-1} + ah$

☑ $y_j = (1 + ah) y_{j-1}$ ☐ $y_j = e^{ax}$

Merknad: Eulers metode er gitt i formelvedlegget.

Oppgave 7. Vi tilnærmer den deriverte til funksjonen $f(x)$ med uttykket

(Fortsettes på side 3.)

$\big(f(h) - f(0)\big)/h$. Da er feilen

$$\left| f'(0) - \frac{f(h) - f(0)}{h} \right|$$

begrenset av

- ☑ $\frac{h}{2} \max_{x\in[0,h]} \left| f''(x) \right|$
- ☐ $\frac{h^2}{2} \max_{x\in[0,h]} \left| f''(x) \right|$
- ☐ $h \max_{x\in[0,h]} \left| f(x) \right|$
- ☐ $\frac{h^2}{2} \max_{x\in[0,h]} \left| f'''(x) \right|$
- ☐ $\frac{h}{2} \max_{x\in[0,h]} \left| f'(x) \right|$

Merknad: Dette tilfellet står i kap.9.6.3 i kompendiet.

(Fortsettes på side 4.)

Løsningsforslag del 2

Under følger forslag til svar på alle punkter i tekstdelen av eksamen. Det er viktig å være klar over at det kan eksistere andre måter å besvare oppgavene på som er fullgode. Videre er det valgt svar og løsningsmetoder i lys av pensum og undervisning i kurset, heller enn ut fra hva som er raskest/minst arbeid.

Oppgave 1. Løs differensligningen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Løsning. Alle løsningen kan skrives som $x_n = x_n^h + x_n^p$. Først bestemmer vi den homogene løsningen, x_n^h.
Innsetting av $x_n^h = r^n$ i den homogene differenslikningen $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ gir den karakteristiske likningen

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

som har løsningene $r = 1$ og $r = 2$, dvs.

$$x_n^h = A1^n + B2^n = A + B2^n,$$

der A og B er valgbare reelle koeffisienter.
Finner så x_n^p. Her er høyresiden et polynom av grad 0, dvs. en konstant. Vanligvis ville vi forsøkt å tilpasse en konstant som x_n^p, men siden konstanter er homogenløsninger går vi opp en grad: $x_n^p = Cn$. Merk at det har ingen hensikt å ta med en konstant i x_n^p. Innsetting gir

$$\begin{aligned} 1 &= x_{n+2}^p - 3x_{n+1}^p + 2x_n^p \\ &= C(n+2) - 3C(n+1) + 2Cn = C(n - 3n + 2n) + C(2-3) = -C. \end{aligned}$$

Dvs. $C = -1$ og

$$x_n^p = -n$$

Til slutt må vi tilpasse initialbetingelsene for $x_n = x_n^p + x_n^h$

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = 0 + A + B, \quad &\Rightarrow \quad A + B = 1 \\ 0 &= x_1 = -1 + A + 2B, \quad &\Rightarrow \quad A + 2B = 1 \end{aligned}$$

Trekker vi den øvre likningen fra den nedre følger $B = 0$ og derved $A = 1$. Løsningen blir da

$$x_n = 1 - n$$

Oppgave 2. Finn Taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ for funksjonen

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Løsning. Taylorpolynomet av grad 3 er gitt ved

$$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$$

Gjentatt derivasjon gir så $((e^x)' = e^x$ og $(e^{-x})' = -e^{-x})$

$$\begin{array}{lclclcl} f(x) & = & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \Rightarrow & f(0) & = & \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ f'(x) & = & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \Rightarrow & f'(0) & = & \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\ f''(x) & = & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \Rightarrow & f''(0) & = & \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\ f'''(x) & = & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \Rightarrow & f'''(0) & = & \frac{1}{2}(1-1) = 0 \end{array}$$

Innsetting gir så

$$T_3 f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

Merknad:
Funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kalles ofte for hyperbolsk cosinus (cosh).
Vi kan også finne Taylorpolynomet ved å regne ut polynomet til e^x, legge til dette innsatt $-x$ og dele på 2.

Oppgave 3. Vis ved induksjon at den n'te deriverte av funksjonen $f(x) = xe^x$ er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = (n + x)e^x$$

for ethvert heltall $n \geq 0$.

Løsning. Vi skal vise $P_n \, : \, f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ for $n \geq 0$
(i) Viser P_0.
Setter vi inn i P_0 følger

$$f^{(0)}(x) = xe^x,$$

som er en gjentagelse av definisjonen av f og derved riktig.
(ii) Viser P_i for $i <= n$ medfører P_{n+1}.
Vi starter med P_n, deriverer begge sider og bruker produktregelen for derivasjon

$$\begin{array}{lclclcl} f^{(n+1)}(x) & = & \left(f^{(n)}\right)' & = & ((n+x)e^x)' & = & (n+x)'e^x + (n+x)\,(e^x)' \\ & = & e^x + (n+x)e^x & = & (n+1+x)e^x, & & \end{array}$$

som er er uttrykket på høyresiden i P_{n+1}. Derved er induksjonsbeviset ferdig.

Oppgave 4. Vi har gitt en differensialligning med tilhørende randverdier på intervallet $[0, 1]$,

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

der α er en reell konstant. Legg merke til at vi har gitt en randbetingelse ved $x = 0$ og en ved $x = 1$.
Finn løsningen.
Finnes det verdier av α slik at løsningen ikke eksisterer?

(Fortsettes på side 6.)

Løsning. Vi setter inn et uttrykk $y = e^{rx}$ i likningen og finner at dette er løsning dersom den karakteristisk likningen

$$r^2 + \alpha^2 = 0,$$

er oppfylt.
Vi antar først at $\alpha \neq 0$. Løsningene er da $r_1 = \alpha i$ og $r_2 = -\alpha i$ der i er den imaginære enheten. Alle løsninger av differensiallikningen er da på formen

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x),$$

der A og B er reelle konstanter. At *alle* løsninger er inneholdt i dette uttrykket er viktig for det andre spørsmålet i oppgaven.
Innsetting av randbetingelser gir nå

$$\begin{array}{rcccccc} 0 & = & y(0) & = & A\cos(0) + B\sin(0) & = & A \\ 1 & = & y(1) & = & A\cos\alpha + B\sin\alpha & & \end{array}$$

Vi får $A = 0$ og $B = 1/\sin\alpha$ og løsningen blir

$$y(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\sin\alpha}.$$

Men, denne løsningen er ikke definert når $\sin\alpha = 0$, dvs. når $\alpha = \pm n\pi$ der n er et naturlig tall. For disse α finner vi altså ingen løsninger som oppfyller randbetingelsene og randverdiproblemet har ikke noen løsning. Det er her viktig at vi har visshet for vi har brukt den fulle løsningen i forsøket på å tilpasse randbetingelsene.
Så tar vi for oss tilfellet $\alpha = 0$. 0 er da en dobbelrot i det karakteristiske polynomet. En løsning er da $y = 1$ og en annen er x ganger denne. Dvs.

$$y = Ax + B$$

Randbetingelser gir

$$\begin{array}{rcccc} 0 & = & y(0) & = & B, \\ 1 & = & y(1) & = & A + B, \end{array}$$

som gir $B = 0$ og $A = 1$ slik at

$$y(x) = x$$

Merknad: Eksistens og entydighet for differensiallikninger med *initial*betingelser (vi har gitt verdier for y og y' i et gitt punkt) er summert opp nederst i setning 10.4.24 i Kalkulus. Dette kan ikke anvendes i denne oppgaven.

Oppgave 5. Vi har gitt en førsteordens differensialligning med en initialverdi,

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

a) Løs differensialligningen og vis at $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

(Fortsettes på side 7.)

b) Vi forsøker å løse ligningen med en numerisk metode som bestemmer en tilnærming $y_j \approx y(jh)$ til løsningen i punktene $x_j = jh$ der $j = 0, 1, 2, \ldots$ og h er en positiv steglengde. Dette gjør vi med følgende algoritme:

1. Fra initialbetingelsen finner vi $y_0 = 1$ mens y_1 bestemmes til $y_1 = 1-h$ ved hjelp av Eulers metode.

2. Vi finner y_j for $j \geq 2$ ved "hoppe-bukk" ("leap-frog") metoden

$$\frac{y_j - y_{j-2}}{2h} = -y_{j-1}.$$

Dersom vi simulerer denne differensligningen ved hjelp av flyttall, vil den numeriske løsningen ikke nærme seg 0 når x blir stor, men vokse over alle grenser. Forklar hvorfor dette skjer.
Hint: Finn den generelle løsningen til *differens*ligningen.

Løsning.
a)
Dersom vi husker formelen fra Kalkulus kan vi bruke denne. Hvis ikke er det greit å behandle differensiallikningen som en separabel en

$$\begin{aligned}
y' &= -y \\
\int \tfrac{y'}{y} dx &= -\int dx \\
\int \tfrac{dy}{y} &= -x + C \\
\ln |y| &= C - x
\end{aligned}$$

Eksponensiering på begge sider gir så $|y| = e^{C-x} = Ae^{-x}$, der A er positiv. Oppløsning av absoluttverdi gir $y = Ae^{-x}$ der A er en vilkårlig reell konstant. Skal vi ha oppfylt initialbetingelsen må $A = 1$ og vi har

$$y(x) = e^{-x}$$

Når $x \to \infty$ har vi $e^x \to \infty$ og tilsvarende $e^{-x} \to 0$. Det siste fører til at $y \to 0$ **b)**
Vi følger hintet. Differenslikningen skrives på standard form som

$$y_j + 2hy_{j-1} - y_{j-2} = 0,$$

og gir den karakteristiske likningen

$$r^2 + 2hr - 1 = 0,$$

som har løsningene

$$r_1 = -h + \sqrt{h^2+1}, \quad r_2 = -h - \sqrt{h^2+1}.$$

Den generelle løsningen er da

$$y_j = Ar_1^j + Br_2^j.$$

Vi ser umiddelbart at $|r_2| > 1$, mens $|r_1| < 1$ (kan vises direkte eller fra at produktet av de to røttene i det karakteristiske polynomet er -1). Skal

(Fortsettes på side 8.)

løsningen gå mot null når $j \to \infty$ må $B = 0$, ellers vil løsningen gå mot uendelig. For at dette skal passe med initialbetingelsene må $r_1 = y_1/y_0$, dvs.

$$1 - h = r_1 = -h + \sqrt{h^2 + 1},$$

som er oppfylt bare når $h = 0$. Dvs. $B \neq 0$ og y_j vokser over alle grenser. Uansett om $B = 0$ hadde vært i samsvar med initialbetingelsene ville avrundingsfeil i en simulering brakt inn den voksende del av den generelle løsningen og resulatet ville vokst over alle grenser.