UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 5. desember 2008.
Tid for eksamen:	9:00 – 12:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. En løsning av differensialligningen $y'' + y = 0$ er

- [ ] $y(x) = e^x$
- [ ] $y(x) = \sin 2x$
- [x] $y(x) = \sin x + \cos x$
- [ ] $y(x) = \cos x^2$
- [ ] $y(x) = \tan x$

Oppgave 2. En løsning av differensialligningen $y''' + y = 0$ er

- [ ] $y(x) = e^x$
- [ ] $y(x) = \sin x$
- [ ] $y(x) = e^{x^2}$
- [ ] $y(x) = e^{2x}$
- [x] $y(x) = e^{-x}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen $y'' - 2y = f(x)$. Hvis $y(x) = \sin x$ er en løsning av ligningen, hva er da $f(x)$?

- [ ] $f(x) = -\sin x$
- [ ] $f(x) = 3\cos x$
- [ ] $f(x) = 3\sin x$
- [x] $f(x) = -3\sin x$
- [ ] $f(x) = \sin x$

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y' + xy = x, \quad y(0) = 0,$$

er gitt ved

- [ ] $y(x) = x$
- [ ] $y(x) = x^2$
- [ ] $y(x) = x/(1+x)$
- [x] $y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$
- [ ] $y = \sin x$

Oppgave 5. Løsningen $x(t)$ av differensialligningen $x'' + \sin(tx') - x^2 = e^t$ er lik den ene løsningen $x_1(t)$ av systemet av to ligninger

- [ ] $x_1' = x_1, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- [x] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_1^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_2^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_2) + x_2^2$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = e^t - \sin(tx_1) + x_1^2$

Oppgave 6. Taylorpolynomet av grad 2 for funksjonen $f(x) = x\tan x$ om $a = 0$ er

- [ ] $T_3(x) = x + x^2$
- [ ] $T_3(x) = x$
- [ ] $T_3(x) = -x$
- [x] $T_3(x) = x^2$
- [ ] $T_3(x) = -x^2$

Oppgave 7. En tekst som inneholder enkelte særnorske tegn lagres med tegnsettene ISO Latin1 og UTF-8 i de to filene fil1 (ISO Latin1) og fil2 (UTF-8). Hvilket av de følgende utsagn er da sant?

- [ ] Enkelte norske tegn blir feil i fil1
- [ ] fil1 inneholder flere bytes enn fil2
- [x] fil2 inneholder flere bytes enn fil1
- [ ] Enkelte norske tegn blir feil i fil2
- [ ] fil1 og fil2 inneholder like mange bytes

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi har en funksjon $f(x)$ og skal finne en numerisk tilnærming til løsningen av ligningen $f(x) = 0$. Da er en av følgende påstander sann:

☐ Sekantmetoden krever at $f'(x)$ er kjent

☐ Sekantmetoden vil vanligvis konvergere raskere enn Newtons metode

☐ Halveringsmetoden vil vanligvis konvergere raskere enn sekantmetoden

☐ Newtons metode vil konvergere for alle funksjoner f

☒ Newtons metode vil vanligvis konvergere raskere enn halveringsmetoden

Oppgave 9. Vi skal beregne en tilnærming til den deriverte $f'(a)$ av en funksjon f ved hjelp av tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Hvis vi regner med flyttall er den totale feilen begrenset av:

☐ $\frac{h^2}{2} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f''(x)\big|$

☐ $\frac{h^3}{6} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f'''(x)\big|$

☐ $\frac{h^3}{6} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f'''(x)\big| + \frac{6\epsilon^*}{h^3} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f(x)\big|$

☐ $\frac{h^2}{6} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f'''(x)\big| + \frac{4\epsilon^*}{h^2} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f(x)\big|$

☒ $\frac{h}{2} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f''(x)\big| + \frac{2\epsilon^*}{h} \max_{x\in[a,a+h]} \big|f(x)\big|$

I alternativene 3, 4 og 5 er tallet ϵ^* avhengig av flyttallstypen som benyttes.

Oppgave 10. Med midtpunktregelen blir integralet av f på $[a, b]$ tilnærmet ved

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) f\big((a+b)/2\big).$$

Hvilken av følgende påstander er sanne (med feil menes her matematisk feil, avrundingsfeilen holdes altså utenfor)?

☐ Midtpunktregelen er mer nøyaktig enn Simpsons regel

☐ Midtpunktregelen og trapesregelen gir alltid nøyaktig samme feil

☐ Midtpunktregelen gir bare 0 i feil hvis $f(x) = c$, der c er en vilkårlig konstant

☒ Midtpunktregelen gir 0 i feil hvis $f(x)$ er en vilkårlig rett linje

☐ Midtpunktregelen gir 0 i feil hvis $f(x) = x^2$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave 1.

a) Løs differensligningen

$$3y_{n+2} + 8y_{n+1} - 3y_n = 8, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 2/3. \tag{1}$$

Løsning. Det karakteristiske polynomet er $3r^2+8r-3 = 0$ som har røttene $r_1 = -3$ og $r_2 = 1/3$. Den generelle løsningen til den homogene ligningen er derfor

$$y_n^h = C_1(-3)^n + C_2 3^{-n}.$$

Siden høyresiden er et polynom av grad 0, prøver vi med en partikulærløsning på formen $y_n^p = A$, der A er en vilkårlig konstant. Setter vi dette inn i ligningen får vi

$$3A + 8A - 3A = 8$$

så $A = 1$. Dermed er den generelle løsningen av differensligningen

$$y_n = x_n^p + x_n^h = 1 + C_1(-3)^n + C_2 3^{-n}.$$

De to startverdiene gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} 0 = y_0 &= 1 + C_1 + C_2, \\ \frac{1}{3} = y_1 &= 1 - 3C_1 + \frac{C_2}{3} \end{aligned}$$

som har løsningen $C_1 = 0$ og $C_2 = -1$. Dermed er løsningen av differensligningen

$$y_n = 1 - 3^{-n}.$$

b) Anta at vi simulerer (løser numerisk) differensligningen (1) ved hjelp av flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen $\{\bar{y}_n\}$ oppføre seg for store verdier av n? Forklar hvorfor.

Løsning. Når vi regner med flyttall vil vi ikke kunne representere startverdien $y_1 = 2/3$ eksakt, og siden

$$y_{n+2} = \frac{1}{3}(8 - 8y_{n+1} + 3y_n),$$

kan vi heller ikke regne ut elementene i følgen eksakt. Dette svarer til at vi løser differensligningen med litt endrede startverdier slik at den beregnede løsningen ikke blir den eksakte $1 - 3^{-n}$, men

$$\bar{y}_n = 1 - (1 + \epsilon_1)3^{-n} + \epsilon_2(-3)^n,$$

der ϵ_1 og ϵ_2 er små tall som er ulik 0. Når n blir stor vil det siste leddet dominere slik at den beregnede løsningen etterhvert vil vokse i tallverdi og til slutt gi overflow.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. Her vil du få bruk for at entropien til et alfabet $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ med sannsynligheter $p(\alpha_i)$ for $i = 1, \ldots n$ er gitt ved

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i)\log_2 p(\alpha_i).$$

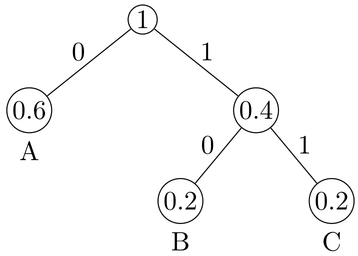
I denne oppgaven er alfabetet gitt ved $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = B$ og $\alpha_3 = C$ med sannsynligheter $p(A) = 0.6$, $p(B) = 0.2$ og $p(C) = 0.2$.

a) En tekst basert på alfabetet over med tilhørende sannsynligheter har blitt kodet med Huffman-koding og gitt koden

0010011.

Finn en tekst som svarer til koden over. Hvor mange bits pr. tegn bruker koden?

Løsning. For å finne ut hva teksten er må vi finne ut hvordan den ble kodet. Vi setter derfor opp Huffman-treet til alfabetet



Fra dette ser vi at kodene til 'A', 'B' og 'C' er

$$c(A) = 0, \quad c(B) = 10, \quad c(C) = 11.$$

Vi vet at Huffman-koding har prefiks-egenskapen slik at ingen kode er starten på en annen kode. Den første '0'en må derfor være en 'A', og den andre '0'en må også være en 'A'. Deretter kommer det en kode som begynner med 1. De to kodene '10' og '11' begynner begge på denne måten og vi ser at vi har '10' i vårt tilfelle. Altså er det tredje tegnet 'B'. Etter dette kommer det en '0' i koden som vi vet svarer til en 'A'. Til slutt har vi '11' som svarer til en 'C'. Altså er teksten

AABAC.

Merk at dette ikke er helt entydig siden Huffman-treet ikke er helt entydig. Vi kan for eksempel bytte om 'B' og 'C' i huffmantreet, noe som vil gi teksten 'AACAB' i steden.

b) Hvor mange bits er det minimale som må til for å kode teksten?
Vil aritmetisk koding gi bedre kompresjon enn Huffman-koding i dette tilfellet? Begrunn svaret.

Løsning. Vi merker oss at hyppigheten til bokstavene i teksten vår svarer eksakt til de gitte sannsynlighetene. Derfor er det minimale antall bits pr. tegn gitt ved

$$H(p) = -p(A)\log_2 p(A) - p(B)\log_2 p(B) - p(C)\log_2 p(C) \approx 1.37.$$

Det minimale antall bits for vår tekst som er 5 tegn lang er derfor omtrent $5 \cdot 1.37 = 6.85$. Siden antall bit må være et heltall ser vi at det minimale

(Fortsettes på side 6.)

antallet faktisk er 7 som jo er det antallet huffmankoden over bruker. Altså er Huffman-koden i dette tilfellet optimal og aritmetisk koding kan ikke klare seg med færre enn 7 bits.

Oppgave 3. Vis ved induksjon at de deriverte til funksjonen $f(x) = x^2 e^x$ er gitt ved

$$f^{(n)}(x) = \big(n(n-1) + 2nx + x^2\big)e^x$$

for alle heltall $n \geq 0$.

Løsning. Vi observerer først at formelen er riktig når $n = 0$. Vi antar så at den er riktig for $n = k$, og må vise at den også gjelder for $n = k + 1$. Vi skal altså vise at om

$$f^{(k)}(x) = \big(k(k-1) + 2kx + x^2\big)e^x, \tag{2}$$

så er også

$$f^{(k+1)}(x) = \big(k(k+1) + 2(k+1)x + x^2\big)e^x. \tag{3}$$

Vi deriverer (2) en gang og får

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \big(f^{(k)}\big)'(x) = \Big(\big(k(k-1) + 2kx + x^2\big)e^x\Big)' \\ &= \big(2k + 2x\big)e^x + \big(k(k-1) + 2kx + x^2\big)e^x \\ &= \big(2k + k(k-1) + 2x + 2kx + x^2\big)e^x \\ &= \big(k(k+1) + 2(k+1)x + x^2\big)e^x \end{aligned}$$

som vi ser stemmer med (3).

Oppgave 4. I denne oppgaven skal du løse en differensialligning numerisk. Hvis ligningen er gitt ved $x' = f(t, x)$, er et steg med Eulers metode gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

mens et steg med Eulers midtpunktmetode er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k + h/2, x_{k+1/2}),$$

der $x_{k+1/2}$ er gitt ved

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k).$$

a) Funksjonen $x(t)$ er gitt som løsningen til differensialligningen

$$x' = t \sin x, \quad x(0) = 1. \tag{4}$$

Finn to tilnærminger x_e og x_m til $x(0.1)$ ved å løse (4) numerisk og ta ett steg med (i) Eulers metode og (ii) Eulers midtpunktmetode.

Løsning. Vi skal beregne en tilnærming til $x(0.1)$ ved å ta ett steg med hver av de to metodene, altså må vi bruke $h = 0.1$. For Eulers metode får vi

$$x_1 = x_0 + hf(0, x_0)$$

(Fortsettes på side 7.)

der $x_0 = x(0) = 1$. Vi får derfor

$$x_e = x_1 = 1 + 0.1 f(0,1) = 1 + 0.1 \cdot 0 \cdot \sin 1 = 1.$$

For Eulers midtpunkmetode må vi først regne ut $x_{1/2}$,

$$x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2} f(0, x_0) = 1 + 0.05 \cdot 0 \cdot \sin 1 = 1.$$

Deretter finner vi tilnærmingen til $x(0.1)$ ved

$$\begin{aligned} x_m = x_1 &= x_0 + h f(0 + h/2, x_{1/2}) \\ &= 1 + 0.1 f(0.05, 1) = 1 + 0.1 \cdot 0.05 \cdot \sin 1 \\ &\approx 1.0042. \end{aligned}$$

b) Vis at feilen i Eulers metode i dette tilfellet er begrenset av

$$\bigl|x(0.1) - x_e\bigr| \leq 0.006.$$

Forventer du at feilen i Eulers midtpunktmetode vil være større eller mindre enn dette? Begrunn svaret ditt.

Løsning. Hvis vi finner taylorpolynomet til løsningen om $a = 0$ og tar med to ledd samt restledd har vi

$$x(0.1) = x(0) + h x'(0) + \frac{h^2}{2} x''(\xi) = x_0 + h f(0, x_0) + \frac{h^2}{2} x''(\xi),$$

der $h = 0.1$ og $\xi \in (0, 0.1)$. De to første leddene kjenner vi igjen som tilnærmingen vi brukte for å finne x_e over. Feilen etter ett ledd med Euler er derfor gitt ved

$$x(0.1) - x_e = \frac{h^2}{2} x''(\xi).$$

Vi trenger derfor å estimere $x''(\xi)$. For å gjøre dette deriverer vi $x' = t \sin x$. Dette gir

$$x'' = \sin x + t x' \cos x = \sin x + t^2 \sin x \cos x.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \bigl|x''(\xi)\bigr| &= |\sin x(\xi) + \xi^2 \sin x(\xi) \cos x(\xi)| \\ &\leq |\sin x(\xi)| + |\xi^2 \sin x(\xi) \cos x(\xi)| \\ &\leq 1 + 0.1^2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1.01. \end{aligned}$$

Her har vi ha brukt at tallverdien av både $\sin x$ og $\cos x$ aldri kan bli større enn 1. For feilen betyr dette at

$$\bigl|x(0.1) - x_e\bigr| = \frac{h^2}{2} \bigl|x''(\xi)\bigr| \leq \frac{0.01}{2} 1.01 = 0.00505.$$

Ved å bruke identiteten $\sin x \cos x = \sin(2x)/2$ kan vi forbedre estimatet for $x''(\xi)$ til

$$\bigl|x''(\xi)\bigr| \leq 1 + 0.1^2 \frac{1}{2} = 1.005.$$

(Fortsettes på side 8.)

Dette gir den noe bedre øvre grensen

$$\left|x(0.1) - x_e\right| \leq \frac{0.1^2}{2} 1.05 = 0.005025.$$

Eulers midtpunktmetode er en andreordens metode og derfor mer nøyaktig enn Eulers metode. Vi må derfor forvente at Eulers midtpunktmetode gir mindre feil enn Eulers metode.

Lykke til!