UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Torsdag 6. desember 2012.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' + y' - 6y = 0$ med initialverdier $y(0) = 2$ og $y'(0) = -1$ er

- [ ] $y(x) = e^{2x}$
- [ ] $y(x) = 2e^{3x} - 3e^{x}$
- [ ] $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$
- [x] $y(x) = e^{2x} + e^{-3x}$
- [ ] $y(x) = e^{-3x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y'' + 2y' + 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ er

- [ ] $y(x) = e^{-x}\cos(2x)$
- [ ] $y(x) = e^{2x}(\cos(2x) + \sin(2x))$
- [ ] $y(x) = 2e^{-x}\sin(2x)$
- [ ] $y(x) = e^{-2x}\sin(x)$
- [x] $y(x) = e^{-x}\sin(2x)/2$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Løsningen til differensialligningen $y' = x^3 + x^3y^2$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

☐ $y(x) = e^{x^3}$

☐ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^4 + 2\right)$

☒ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}\left(x^4 + \pi\right)\right)$

☐ $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 1$

☐ $y(x) = e^{x^4/4}$

Oppgave 4. Vi vil løse differensialligningen $x' = tx$, $x(0) = 1$ numerisk. Bruker vi tre steg (med konstant steglengde) med Eulers metode for å finne en tilnærming til $x(1.5)$ får vi verdien

☐ 5/8

☐ 1

☐ 0

☐ 5/4

☒ 15/8

Oppgave 5. Vi skal se på tilnærmingen til den deriverte gitt ved den symmetriske Newton-kvotienten

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

For $f(x) = x^3$ blir feilen i denne tilnærmingen nøyaktig lik (bortsett fra avrundingsfeil)

☐ $h^2/2$

☐ 0

☒ h^2

☐ h

☐ $h/2$

Oppgave 6. En tekst som inneholder 512 tegn er lagret i en fil med en standard koding ved hjelp av 1055 bytes. Hvilken koding er filen da kodet med?

☒ UTF-8

☐ UTF-16

☐ ISO Latin-1

☐ 8-bits ASCII

☐ UTF-32

Løsning. Både Iso Latin-1 og ASCII bruker en byte, så de kan ikke være brukt. UTF-32 bruker 4 bytes så den kan heller ikke være brukt. UTF-16 bruker enten 2 eller 4 bytes pr. tegn og kan derfor ikke gi et odde antall bytes. Dermed gjenstår bare UTF-8.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke aritmetisk koding på teksten $AABA$. Hvis du tilordner intervallet $[0, 0.75]$ til A, så vil den aritmetiske koden ligge i intervallet

- ☐ $[0.216, 0.36]$
- ☐ $[0.421875, 0.5625]$
- ☒ $[0.421875, 0.52734375]$
- ☐ $[0.52734375, 0.5625]$
- ☐ $[0, 0.31640625]$

Oppgave 8. Hvilken er følgende påstander om numerisk integrasjon er sann?

- ☐ Feilene i Simpons regel og trapesmetoden er begge begrenset av uttrykk som involverer den andrederiverte.
- ☐ Simpsons metode gir en god tilnærming for alle integrerbare funksjoner.
- ☐ Trapesmetoden gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.
- ☐ Trapesmetoden gir en bedre tilnærming enn midtpunktmetoden.
- ☒ Simpsons regel gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.

Oppgave 9. Differensialligningene

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + \sqrt{t}x + y &= 0 \\ y' + x &= t^3 \end{aligned}$$

skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- ☐ $x_2' = x_1, \quad y_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_1' = x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = 2tx_2 - \sqrt{x}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2tx_2 + \sqrt{t}x_1 + y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☐ $x_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_2' = x_1 \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- ☒ $x_1' = x_2, \quad x_2' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$

Oppgave 10. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^4$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$, med et tredjegradspolynom $p_3(x)$. Vi har da at

- ☒ $p_3(x) = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 16x(x-1) + 34x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x^3$
- ☐ $p_3(x) = 2x + 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 5x(x-1) + 4x(x-1)(x-2)$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{10}{3}x_{n+1} + x_n = -1, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{5}{6}$$

har løsningen $x_n = (3 + 3^{-n})/4$.

Løsning. Vi vet at den generelle løsningen til differensligningen er gitt ved en partikulærløsning pluss den generelle løsningen av den homogene ligningen. Vi finner først den generelle løsningen av den homogene ligningen. Karakteristisk ligning er $r^2 - 10r/3 + 1 = 0$ som har de to løsningene $r_1 = 1/3$ og $r_2 = 3$. Dermed er den generelle løsningen av den homogene ligningen

$$x_n^h = C3^{-n} + D3^n.$$

Siden høyresiden er konstant forsøker vi med en partikulærløsning på samme form, det vil si $x_n^p = A$. Vi setter inn og får at A da må tilfredstille

$$A - 10A/3 + A = -1,$$

og dermed får vi $A = 3/4$. Den generelle løsningen av differensligningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \frac{3}{4} + C3^{-n} + D3^n.$$

De to startverdiene gir følgende ligninger for C og D,

$$\begin{aligned} 1 = x_0 &= 3/4 + C + D, \\ 5/6 = x_1 &= 3/4 + C/3 + 3D, \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} C + D &= 1/4, \\ C/3 + 3D &= 1/12, \end{aligned}$$

som har løsningen $C = 1/4$ og $D = 0$. Dermed er løsningen som gitt i oppgaven.

b) Anta at vi simulerer differensligningen i (a) på datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Løsning. Vi ser at den ene startverdien er $x_1 = 5/6$, et tall som ikke kan representeres eksakt i to-tallsystemet. Og ved utregning av videre verdier vil en divisjon med 3 forekomme hver gang, en operasjon som også gir avrundingsfeil. Dette betyr at en numerisk simulering vil generere verdier som svarer til en løsning der koeffisientene C og D over er perturbert til $\tilde{C} = 1/4 + \epsilon_1$ og $\tilde{D} = \epsilon_2$, altså på formen

$$\bar{x}_n = \Big(\frac{1}{4} + \epsilon_1\Big)3^{-n} + \epsilon_2 3^n + \frac{3}{4},$$

der ϵ_1 og ϵ_2 begge er av størrelseorden 10^{-16} (i absoluttverdi). Dermed ser vi at selv om den eksakte løsningen vil konvergere mot 3/4 vil den simulerte løsningen etterhvert bli veldig stor og til slutt gi overflow.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{3}n^3 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2$$

for alle $n \geq 1$.

Løsning. Vi sjekker først at hypotesen stemmer for $n = 1$. Da sier ulikheten at $1/3 \leq 1$ som opplagt er sant. Anta så at ulikheten er vist for n, vi må vise at den da også gjelder for $n+1$. Det enkleste er å begynne med høyresiden og spalte opp summen. Vi har

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \geq n^3/3 + (n+1)^2$$

der vi har brukt induksjonshypotesen. For at hypotesen skal være sann må vi ha $n^3/3 + (n+1)^2 \geq (n+1)^3/3$, eller

$$n^3/3 + (n+1)^2 - (n+1)^3/3 \geq 0.$$

Hvis vi ekspanderer ut venstresiden får vi

$$n^3/3 + n^2 + 2n + 1 - n^3/3 - n^2 - n - 1/3 = n + 2/3.$$

Dette siste uttrykket er opplagt positivt for $n \geq 1$ og dermed er hypotesen sann også for $n+1$.

Oppgave 3. Vi har gitt funksjonen $f(x) = 1/(1+x)$. Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av n'te grad for f om 0. Hvor stor må du velge n for at $T_n(x)$ skal gi en tilnærming til $f(x)$ med absolutt feil mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[0, 0.5]$?

Løsning. Taylor-polynomet er gitt ved formelen

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a),$$

der $a = 0$ og $f(x) = 1/(1+x) = (1+x)^{-1}$. Vi trenger et uttrykk for den deriverte $f^{(k)}(x)$ og finner

$$f'(x) = -1(1+x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f'''(x) = -6(1+x)^{-4}.$$

Vi ser at hver gang vi deriverer får vi inn et negativt heltall som faktor slik at koeffisienten vil alternere i fortegn og faktorene ellers akkumuleres til et fakultetsuttrykk. Den generelle deriverte blir derfor

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \; k!(1+x)^{k+1}.$$

Dermed er $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!$ slik at Taylor-polynomet blir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(-1)^k k! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n,$$

altså en geometrisk rekke.

(Fortsettes på side 6.)

For å finne ut hvor stor n må velges for å få feilen mindre enn 0.001 finner vi feilleddet som er gitt ved

$$R_n(x) = \frac{((x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

der c er et tall i intervallet (a, x). Setter vi inn får vi

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+1}(n+1)!(1+c)^{-n-2} = (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}},$$

der c er et tall i intervallet $[0, x]$. Med tallverdi får vi da

$$\bigl|R_n(x)\bigr| = \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+2}} \leq x^{n+1}$$

siden nevneren er minst for $c = 1$. Velger vi n som det minste tallet slik at $x^{n+1} \leq 0.001$ for alle $x \in [0, 0.5]$ vil åpenbart feilen bli mindre enn 0.001. Og siden x^{n+1} er en voksende funksjon må vi da velge n slik at

$$0.5^{n+1} \leq 0.001.$$

Den minste n som gjør at denne ulikheten er tilfredstilt er $n = 9$.

Oppgave 4.
Vi har gitt differensialligningen

$$x' = x^2/(1+t), \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.

Løsning. Siden ligningen kan skrives $x'/x^2 = 1/(1+t)$ ser vi at den er separabel. Integerer vi høyresiden får vi

$$\int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C.$$

Integrerer vi venstre siden får vi

$$\int \frac{dt}{x(t)^2} = \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x(t)}.$$

Dermed må løsningen $x(t)$ tilfredstille ligningen

$$-\frac{1}{x(t)} = \ln|1+t| + C.$$

Siden vi er interessert i t i intervallet $[0, 1]$ kan vi fjerne tallverditegnet. Løser vi med hensyn på $x(t)$ får vi da

$$x(t) = \frac{1}{-C - \ln(1+t)}.$$

Startverdien $x(0) = 1$ gir

$$1 = \frac{1}{-C - \ln 1} = \frac{1}{-C},$$

så $C = -1$. Dermed er løsningen

$$x(t) = \frac{1}{1 - \ln(1+t)}.$$

(Fortsettes på side 7.)

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = 0.25$ ved å ta ett steg med Eulers metode.

Løsning. Eulers metode er gitt ved $x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)$ og det første steget i vårt tilfelle blir

$$x_1 = x_0 + hf(0, x_0) = x(0) + hf(0, x(0)) = 1 + hf(0, 1).$$

Siden $f(t, x) = x^2/(1 + t)$ er $f(0, 1) = 1$ så med $h = 0.25$ får vi $x_1 = 1 + 0.25 = 1.25$.
Et alternativ til Eulers metode for en generell ligning $x' = f(t, x)$ er gitt ved relasjonen som forbinder (t_k, x_k) med (t_{k+1}, x_{k+1}) ved hjelp av

$$x_{k+1} = x_k + hf\big(t_k + h/2, (x_k + x_{k+1})/2\big), \qquad t_{k+1} = t_k + h. \tag{2}$$

Forklar hvorfor metoden er rimelig.

Løsning. Denne metoden er en justering av Eulers metode som minner om Eulers midtpunktmetode. Uttrykket $f\big(t_k + h/2, (x_k + x_{k+1})/2\big)$ gir en tilnærming til den deriverte i midtpunktet $(t_k + t_{k+1})/2$ der vi bruker $(x_k + x_{k+1})/2$ som en tilnærming til løsningen. Dette bør fungere bedre enn original Euler som bruker $f(t_k, x_k)$ som en tilnærming til den deriverte. I utgangspunktet kjenner vi ikke x_{k+1}, men dette gir oss en relasjon vi kan utnytte for å finne x_{k+1}, se under.

c) Dersom vi bruker metoden gitt ved (2) for $k = 0$ på differensialligningen (1) får vi at x_1 må tilfredstille en andregradslinging. Vis at en av løsningene av denne ligningen er gitt ved

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4h - 3h^2}}{h}. \tag{3}$$

Løsning. Setter vi inn $f(t, x) = x^2/(1 + t)$ blir (2) for $k = 0$ til

$$x_1 = x_0 + h\frac{(x_0 + x_1)^2}{4(1 + (t_0 + h/2))}.$$

Setter vi også inn $t_0 = 0$ og $x_0 = 1$ får vi

$$x_1 = 1 + h\frac{(1 + x_1)^2}{4 + 2h}.$$

Vi ganger med $4 + 2h$, ekspanderer ut parantesen og samler ledd og ender opp med ligningen

$$hx_1^2 - 4x_1 + 4 + 3h = 0.$$

Den ene løsningen av denne ligningen er som gitt over.
Ta ett steg av lengde $h = 0.25$ med metoden gitt ved (3). Blir tilnærmingen mer eller mindre nøyaktig enn tilnærmingen med Eulers metode?

Løsning. Hvis vi setter $h = 0.25$ får vi

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 1 - 3/16}}{0.25} \approx 1.2918.$$

Vi ser at dette er en bedre tilnærming til den eksakte løsningen $x(0.25) \approx 1.28724$ enn tilnærmingen $x_1 \approx 1.25$ som vi fikk med Eulers metode.
Forklar hvordan denne metoden, for en generell ligning, erstatter numerisk løsning av en differensialligning med et annet numerisk problem.

(Fortsettes på side 8.)

Løsning. For en generell differensialligning $x' = f(t, x)$ blir (2) en ikke-lineær ligning for den ukjente x_{k+1}. Denne kan løses ved en av metodene fra pensum, halveringsmetoden, Newtons metode eller sekantmetoden. Med andre ord har vi redusert det å løse en differensialligning numerisk til det å løse numerisk en sekvens av ikke-lineære ligninger. Legg merke til at vi har en god startverdi for beregningene for å finne x_{k+1} ut fra verdien i foregående punkt x_k.

Lykke til!