UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 6. desember 2013.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Løsningen til differensialligningen $y'' + 4y' - 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 4$ og $y'(0) = -2$ er

- [x] $y(x) = e^{-5x} + 3e^{x}$
- [ ] $y(x) = 2e^{5x} + 2e^{x}$
- [ ] $y(x) = 2e^{-5x} + 2e^{x}$
- [ ] $y(x) = 5e^{x} - e^{-5x}$
- [ ] $y(x) = 4e^{x}$

Oppgave 2. Løsningen til differensialligningen $y'' - 4y' + 5y = 5$ med initialverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$ er

- [ ] $y(x) = 5 - 5e^{2x}\cos x$
- [ ] $y(x) = e^{2x}(\cos x - e^{2x}\sin x)$
- [x] $y(x) = 1 - e^{2x}(\cos x - 3\sin x)$
- [ ] $y(x) = 1 - e^{2x}(\cos x + \sin x)$
- [ ] $y(x) = e^{2x}\sin x$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Løsningen til differensialligningen $y' - 2xy = -x$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

- [ ] $y(x) = e^{x^2}$
- [ ] $y(x) = 1 + xe^{x^2}$
- [ ] $y(x) = 2 - e^{x^2}$
- [x] $y(x) = \left(1 + e^{x^2}\right)/2$
- [ ] $y(x) = e^x$

Løsning. Kan løses som førsteordens lineær ligning eller som separabel førsteordens ligning. Bare å følge oppskriften.

Oppgave 4. Vi vil løse ligningen $x^3 - 3 = 0$ numerisk. Bruker vi tre steg med Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ får vi tilnærmingen

- [ ] $x_3 \approx 1.65324$
- [x] $x_3 \approx 1.44281$
- [ ] $x_3 \approx 1.05873$
- [ ] $x_3 \approx 1.30921$
- [ ] $x_3 \approx 1.19291$

Løsning. Bare å bruke formelen for Newtons metode.

Oppgave 5. Vi skal se på tilnærmingen til den andrederiverte gitt ved

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

For $f(x) = x^2$ blir feilen i denne tilnærmingen nøyaktig lik (bortsett fra avrundingsfeil)

- [ ] $h^2/2$
- [ ] 2
- [x] 0
- [ ] h
- [ ] $h/2$

Løsning. Her vet vi at $f''(a) = 2$ mens tilnærmingen gir samme resultat, dermed blir feilen 0.

Oppgave 6. En tekst som inneholder 5000 tegn, inkludert særnorske tegn, er lagret i en fil med en standard koding ved hjelp av 5000 bytes. Hvilken koding er filen da kodet med?

- [ ] UTF-8
- [ ] UTF-16
- [x] ISO Latin-1
- [ ] 7-bits ASCII
- [ ] UTF-32

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Du skal bruke aritmetisk koding på teksten AAB. Hvis du tilordner intervallet $[0, 2/3)$ til A, så vil den aritmetiske koden ligge i intervallet

- ☐ $[8/9, 1)$
- ☐ $[2/3, 8/9)$
- ☐ $[4/9, 2/3)$
- ☐ $[0, 8/27)$
- ☒ $[8/27, 4/9)$

Løsning. Siden første tegn er A skal koden ligge i $[0, 2/3)$. Siden andre tegn også er en A må koden ligge i de nederste $2/3$ av dette intervallet, det vil si i $[0, 4/9)$. Og siden det tredje tegnet er B vil koden for AAB ligge i den øverste tredjedelen av dette intervallet, det vil si i $[8/27, 4/9)$.

Oppgave 8. Vi tilnærmer integralet $\int_0^h x\,dx$ med trapesmetoden med ett steg. Svaret blir da (vi ser bort fra avrundingsfeil)

- ☐ 0
- ☒ $h^2/2$
- ☐ h
- ☐ $h/2$
- ☐ 1

Løsning. Her er det egentlig bare å regne ut integralet siden funksjonen som skal integreres er en rett linje.

Oppgave 9. Differensialligningen

$$x''' - \sin x'' + (x')^2 + tx = t^2$$

skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 + x_2^2 + \sin x_3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 - \sin x_3$
- ☐ $x_3' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$
- ☒ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 - tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$
- ☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2 + tx_1 - x_2^2 + \sin x_3$

Oppgave 10. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$, med et tredjegradspolynom $p_3(x)$. Vi har da at

- ☐ $p_3(x) = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 16x(x-1) + 34x(x-1)(x-2)$
- ☒ $p_3(x) = x^3$
- ☐ $p_3(x) = 2x + 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2)$
- ☐ $p_3(x) = x + 5x(x-1) + 4x(x-1)(x-2)$

Løsning. Her er det ingen grunn til å regne. Det midterste alternativet må åpenbart stemmen med x^3 i interpolasjonspunktene. Og ikke bare der, men overalt.

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1.

a) Vis at differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{x_n}{9} = 1, \quad x_0 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{3}$$

har løsningen $x_n = (9 - 11 \cdot 3^{-n})/4$.

Løsning. Den karakteristiske ligningen er $9r^2 - 6r + 1 = 0$ som har en dobbel rot i $r = 1/3$. Den generelle løsningen av den homogene ligningen er derfor

$$x_n^h = (C + Dn)/3^n.$$

Siden høyresiden er av grad 1 prøver vi med en partikulærløsning på formen $x_n^p = A$. Innsatt i ligningen får vi da

$$A - 2A/3 + A/9 = 1$$

eller $4A/9 = 1$. Dermed må vi ha $A = 9/4$. Den generelle løsningen av differensligningen er derfor

$$x_n = x_n^h + x_n^p = (C + Dn)/3^n + 9/4.$$

Startverdiene gir de to ligningene

$$\begin{aligned} -1/2 &= x_0 = C + 9/4 \\ 4/3 &= x_1 = (C + D)/3 + 9/4. \end{aligned}$$

Fra den første får vi $C = -11/4$ som innsatt i den siste gir $D = 0$.

b) Anta at vi simulerer differensligningen i (a) på datamaskin med 64 bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?

Løsning. Den eksakte matematisk løsningen vil åpenbart nærme seg 9/4 når n går mot uendelig siden 3^{-n} da går mot 0. Startverdien $x_1 = 4/3$ kan imidleritd ikke representeres eksakt, og i den videre simuleringen får vi divisjon med 3 og 9. Dette betyr at simuleringen svarer til å løse et problem med perturberte startverdier $x_0 = -1/2 + \delta_1$ og $x_1 = 4/3 + \delta_2$ der $|\delta_1|$ og $|\delta_2|$ begge er av størrelsesorden 10^{-16}. Dermed blir koeffisientene $\bar{C} = -11/4 + \epsilon_1$ og $\bar{D} = \epsilon_2$, der både ϵ_1 og ϵ_2 er av størrelsesorden $1+^{-16}$. Den simulerte løsningen vil dermed oppføre seg som

$$\bar{x}_n = \bar{x}_n^h + \bar{x}_n^p = (\bar{C} + \bar{D}n)/3^n + 9/4 = 9/4 - (11/4 + \epsilon_1)3^{-n} + \epsilon_2 n 3^{-n}.$$

Her vil faktoren 3^{-n} gjøre at begge de to siste leddene går mot null slik at den simulerte løsningen går mot 9/4. Med andre ord vil det ikke bli problemer med avrundingsfeil.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 2. Vis den utvidede trekantulikheten

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

ved induksjon, der $n \geq 2$ er et heltall. Du kan ta den vanlige trekantulikheten $|a + b| \leq |a| + |b|$ for gitt.

Løsning. Vi observerer først at den utvidede trekantulikheten for $n = 2$ reduserer seg til den vanlige trekantulikheten. Anta så at den utvidede trekantulikheten gjelder for $n = k$, vi må vise at da gjelder den også for $n = k + 1$. Vi har

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}| &\leq |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| + |a_{k+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|, \end{aligned}$$

der vi i første ulikhet brukte den vanlige trekantulikheten med $a = a_1 + \cdots + a_k$ og $b = a_{k+1}$, og i den andre induksjonshypotesen. Dermed ser vi at ulikheten også stemmer for $n = k + 1$ og induksjonsbeviset er fullført.

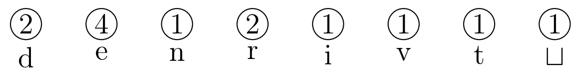
Oppgave 3.

a) Lag et Huffman-tre for teksten $\boldsymbol{x}$ ='den deriverte' med sannsynlighetsfordeling bestemt av teksten.

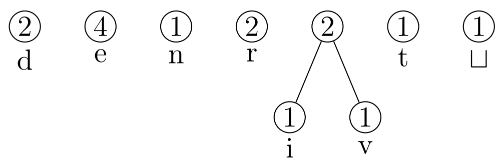
Løsning. Vi observerer først at frekvensen til de ulike tegnene er

$$f(d) = 2, f(e) = 4, f(n) = 1, f(r) = 2, f(i) = 1,$$
$$f(v) = 1, f(t) = 1, f(\sqcup) = 1.$$

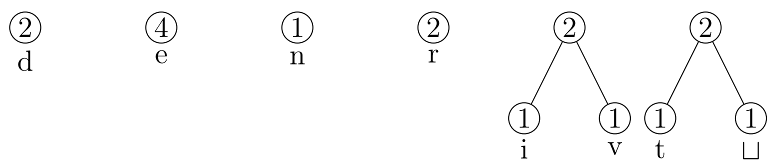
Huffman-algoritmen starter med å lage et en-node binært tre for hvert symbol:



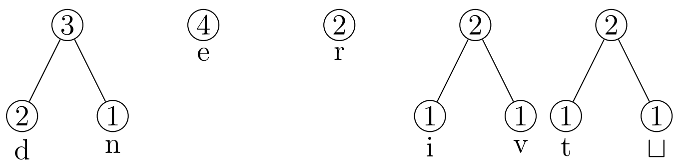
Deretter slår vi sammen to trær med minimal vekt til ett tre:



Vi slår sammen de to siste trærne:

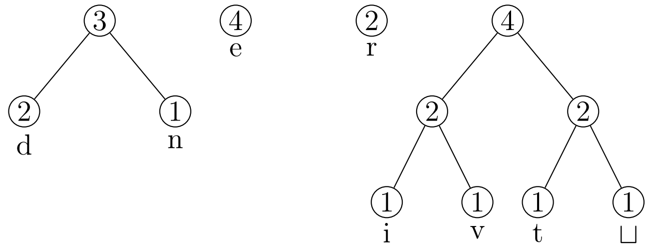


Vi slår så sammen 'd' og 'n'

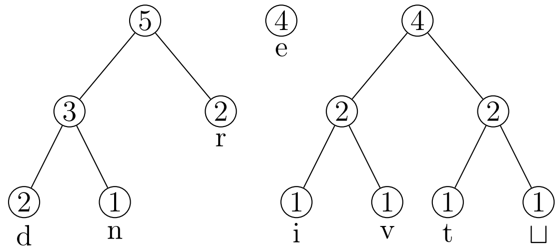


(Fortsettes på side 6.)

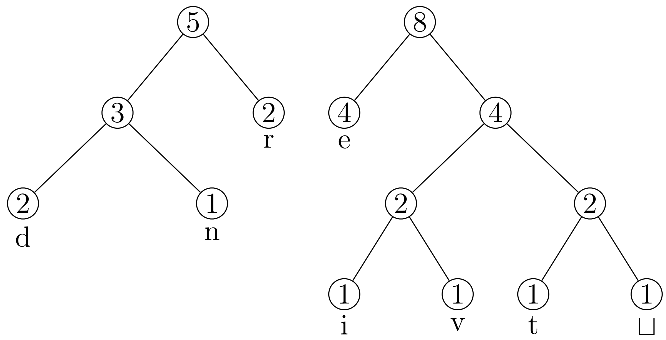
Som neste steg velger vi å slå sammen de to trærne lengst til høyre:



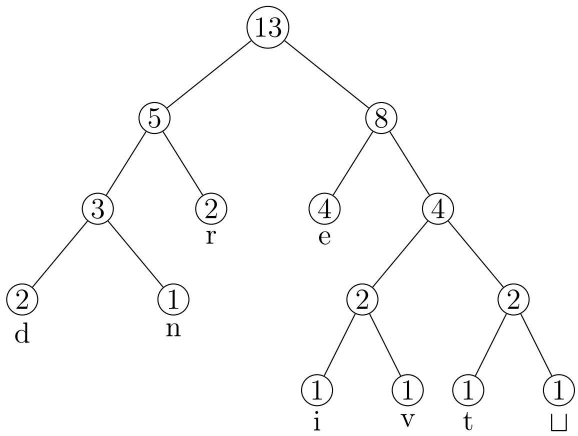
Vi slår så sammen treet til venstre med r:



Neste steg er å slå sammen de to trærne med frekvens 4:



Til slutt slår vi sammen disse to trærne:



Dette er det endelige Huffman-treet.

b) Kod teksten i (a) med Huffman-koding og regn ut antall bits pr. tegn for koden. Hva er det minimale antall bits teksten kan kodes med?

(Fortsettes på side 7.)

Løsning. Hvis vi assossierer 0 med hver venstre kant og 1 med hver høyre kant får vi følgende koder for de ulike symbolene:

$$c(d) = 000, c(n) = 001, c(r) = 01, c(e) = 10, c(i) = 1100,$$
$$c(v) = 1101, c(t) = 1110, c(\sqcup) = 1111.$$

Den gitte teksten kodes derfor som

000 10 001 1111 000 10 01 1100 1101 10 01 1110 10

(her har vi tatt med mellomrom for å skille de ulike tegnene, dette er bare for å gjøre det lettere å lese og er ikke en del av koden), til sammen 37 bits. Fra frekvensene finner vi at sannsynligheten for de ulike tegnene er

$$p(d) = 2/13, p(e) = 4/13, p(n) = 1/13, p(r) = 2/13,$$
$$p(i) = 1/13, p(v) = 1/13, p(t) = 1/13, p(\sqcup) = 1/13.$$

Dermed blir informasjonsentropien til alfabetet

$$H \approx 2.78.$$

Siden teksten inneholder 13 tegn er det minimale antall bits den kan kodes med $13 \times 2.78 \approx 36.14$, altså 37 bits. Dermed er Huffman-koding optimal i dette tilfellet.

Vi minner om at informasjonsentropien til et alfabet med sannsynligheter $p_1, p_2, \ldots, p_n$ er gitt ved

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p(\alpha_i) \log_2 p(\alpha_i).$$

Oppgave 4.

Vi har gitt differensialligningen

$$x' = e^{-x}, \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.

Løsning. Vi observerer at ligningen kan skrives $e^x x' = 1$ så den er separabel. Hvis vi integrerer høyresiden får vi

$$\int 1\, dt = t + C.$$

Integrasjon på venstre side gir

$$\int e^{x(t)}\, dt = \int e^x\, dx = e^x = e^{x(t)}.$$

Dermed er $e^{x(t)} = t + C$. Vi løser med hensyn på $x(t)$ ved å ta naturlig logaritme på begge sider og får

$$x(t) = \ln\bigl(t + C\bigr).$$

Startverdien $x(0) = 1$ gir

$$1 = x(0) = \ln C$$

eller $C = e$. Dermed er den endelige løsningen

$$x(t) = \ln(t + e).$$

(Fortsettes på side 8.)

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = h$ ved å ta ett steg med Eulers metode. Finn en øvre grense for feilen i denne tilnærmingen.

Løsning. Eulers metode med steglengde h er gitt ved

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0)$$

der $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ og $f(t,x) = e^{-x}$ i dette tilfellet. Dermed får vi

$$x_1 = 1 + hf(0,1) = 1 + he^{-1} = 1 + h/e.$$

Vi vet at Eulers metode svarer til en tilnærming med et Taylor-polynom av grad 1. Feilen er dermed gitt ved restleddet

$$R_1 x(t) = \frac{h^2}{2} x''(\xi)$$

der ξ er et tall i intervallet $(0, h)$.
Fra $x'(t) = e^{-x(t)}$ får vi at

$$x''(t) = -e^{-x(t)} x'(t) = -\big(e^{-x(t)}\big)^2 = -e^{-2x(t)}.$$

Tallverdien til feilen er derfor gitt ved

$$\big|R_1 x(h)\big| = \frac{h^2}{2} \big|x''(\xi)\big| = \frac{h^2}{2} e^{-2x(\xi)}. \tag{2}$$

Fra differensialligninen ser vi at x' alltid er positiv så $x(t)$ er en voksende funksjon som starter med $x(0) = 1$. Altså er en øvre grense i (2) gitt ved

$$\big|R_1 x(h)\big| \le \frac{h^2}{2} e^{-2x(0)} = \frac{h^2}{2} e^{-2}.$$

Lykke til!