UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 5. Desember 2014.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \ln(x + 1)$?

A: 0

B: $x^2/2$

C: x

D: $x + x^2/2$

✓**E:** $x - x^2/2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = \pi$ for funksjonen $f(x) = \sin x$?

A: $(x - \pi) - (x - \pi)^3/6$

B: $-x^2/2$

C: $-(x - \pi)^3/3$

✓**D:** $-(x - \pi) + (x - \pi)^3/6$

E: $x - x^3/3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi si om feilleddet $R_n(x)$?

A: Feilleddet vil for hver x gå mot uendelig når n går mot uendelig.

✓**B:** For alle reelle tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot uendelig.

C: Feilleddet er 0 overalt.

D: Feilleddet vil gå mot 0 når n går mot uendelig for alle x i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av x.

E: For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$

✓**B:** $y(x) = e^x + e^{3x}$

C: $y(x) = e^x + 2e^{3x}$

D: $y(x) = 2e^x + e^{3x}$

E: $y(x) = 2e^x$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $y' + y^2x^2 = 0$ er

✓**A:** $y(x) = 1/(x^3/3 + 1)$

B: $y(x) = 1/(1 - x^3/3)$

C: $y(x) = 1/(x^3 + 1)$

D: $y(x) = 1/(x^2/3 - 1)$

E: $y(x) = e^{-x^3/3+1}$

Oppgave 6. Newton-formen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = (x-1)^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$ er

A: $p_3(x) = -1 - x + x(x-1)(x-2)$

✓**B:** $p_3(x) = -1 + x + x(x-1)(x-2)$

C: $p_3(x) = -1 + x - x(x-1)(x-2)$

D: $p_3(x) = 1 + x + x(x-1)(x-2)$

E: $p_3(x) = -1 + 2x + 2x(x-1)(x-2)$

Oppgave 7. Vi tar to steg med Newtons metode for $f(x) = x^2 - 2$, og starter i $x_0 = 1$. Da får vi

A: $x_2 = 7/5$

B: $x_2 = 3/2$

✓**C:** $x_2 = 17/12$

D: $x_2 = 1$

E: $x_2 = 15/12$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a))/h,$$

og at den symmetriske Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a-h))/(2h).$$

Hvilken av følgende påstander om numerisk derivasjon er sann?

A: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle tredjegradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

B: Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

✓**C:** Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

D: Vi trenger ikke ta hensyn til avrundingsfeil når vi gjør numerisk derivasjon.

E: Både Newton-kvotienten og den symmetriske Newton-kvotienten gir en feil av størrelse $h^2/6$, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

Oppgave 9. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut $\int_0^2 x^2 dx$ får vi

A: 5/2

B: 8/3

C: 11/2

✓**D:** 11/4

E: 3

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + (\sin t)x' + 5x = \tan t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 0$

B: $x_1' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t, \quad x_2' = x_1,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

C: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 + 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(1) = 0,\ x_2(1) = 1$

✓**E:** $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t,\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at, for alle $n \geq 1$, så er

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2.$$

Svar: La P_n være induksjonspåstanden. P_n er opplagt sann for $n = 1$. Anta så at P_k er sann for $k = 1, 2, \ldots, n$. Vi får at

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n n(n+1)/2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n (n+1)(n/2 - (n+1)) \\
&= (-1)^n (n+1)(-1 - n/2) = (-1)^{n+1}(n+1)(n+2)/2.
\end{aligned}$$

Dermed er P_{n+1} også sann, og vi har fullført induksjonsbeviset.

Oppgave 2. Vis at differenslikningen

$$6x_{n+2} - 5x_{n+1} + x_n = 4^{-n}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -2/3$$

har løsning $x_n = -8 \cdot 3^{-n} + 8 \cdot 4^{-n} = 8(4^{-n} - 3^{-n})$. Hva skjer for store n når denne differenslikningen simuleres på en datamaskin med 64 bits flyttall?

Svar: Den karakteristiske likningen blir $6r^2 - 5r + 1 = 0$, som gir røttene $r = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}$, som gir verdiene $1/2$ og $1/3$. Den generelle løsningen av den homogene likningen er dermed $x_n^h = C2^{-n} + D3^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = A4^{-n}$. Vi får da at

$$6A4^{-n-2} - 5A4^{-n-1} + A4^{-n} = \left(\frac{6}{16} - \frac{5}{4} + 1\right) A4^{-n} = \frac{1}{8}A4^{-n} = 4^{-n},$$

som gir at $A = 8$. Den generelle løsningen blir dermed

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C2^{-n} + D3^{-n} + 8 \cdot 4^{-n}.$$

Initialverdiene gir oss at

$$\begin{gathered}
C + D + 8 = 0 \\
C/2 + D/3 + 2 = -2/3,
\end{gathered}$$

som gir at $C = 0$ og $D = -8$, slik at løsningen blir

$$x_n = -8 \cdot 3^{-n} + 8 \cdot 4^{-n} = 8(4^{-n} - 3^{-n}).$$

På grunn av avrundingsfeil i initialverdiene vil maskinen her i stedet regne ut

$$\tilde{x}_n = \hat{\epsilon}_1 2^{-n} - (8 + \hat{\epsilon}_2) \cdot 3^{-n} + 8 \cdot 4^{-n},$$

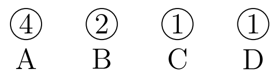
der $\hat{\epsilon}_1$ og $\hat{\epsilon}_2$ er små tall. Uansett så vil dette gå mot 0 når $n \to \infty$. Bare n blir stor nok så vil maskinen runde av dette til 0, som kan testes ved å kjøre følgende kode, der N er valgt slik at iterasjonen der alt blir rundet av til 0 blir synlig:

(Fortsettes på side 5.)

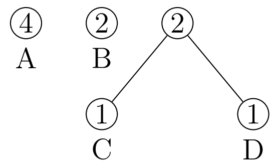
```
N=1040
xpp = 0
xp = -2/3.
for n in range(N):
    x = (5*xp - xpp + 4**(-n))/6.
    print x
    xpp = xp
    xp = x
```

Oppgave 3. Vi har gitt teksten $\mathbf{x} = ABCDAABA$. Skriv opp et Huffman-tre for denne teksten, og skriv opp Huffman-koden for teksten. Hvor mange bits per symbol bruker koden?

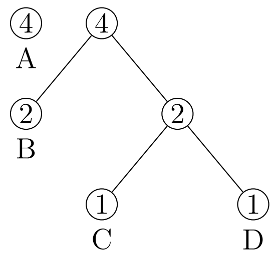
Svar: Frekvensene blir $f(A) = 4$, $f(B) = 2$, $f(C) = f(D) = 1$. Vi tegner opp dette med 4 noder slik:



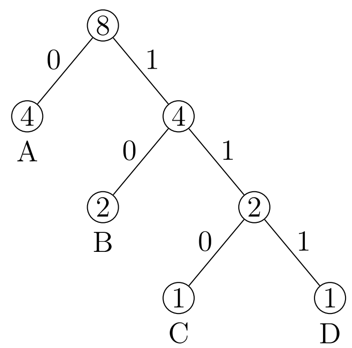
Nodene for C og D har lavest frekvens og må slås sammen til en node først.



Den resulterende noden slås så sammen med B-noden,



før de to siste nodene slås sammen.



Her har vi også satt på 0 på kanter som går mot venstre, 1 på kanter som går mot høyre. Et mulig valg av Huffman-koder blir da

$$c(A) = 0 \qquad c(B) = 10 \qquad c(C) = 110 \qquad c(D) = 111,$$

(Fortsettes på side 6.)

slik at teksten blir kodet som

$$0\ 10\ 110\ 111\ 0\ 0\ 10\ 0.$$

Antall bits som brukes blir da 14, som svarer til $14/8 = 1.75$ bits per symbol.

Oppgave 4.

a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad n, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = e^x$ om 0. Skriv også opp et uttrykk for restleddet $R_n(x)$.

Svar: Alle de deriverte er $f^{(n)}(x) = e^x$, slik at $f^{(n)}(0) = 1$. Dermed blir Taylorrekka

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!,$$

og restleddet kan skrives som

$$R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!,$$

der c er et tall mellom 0 og x.

b) Bruk Taylorrekka med restledd fra a) til å regne ut $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ med en nøyaktighet på 0.01.

Svar: Vi setter inn $x = -t^2$ i $T_n(x)$ og får

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t^2} dt &= \int_0^1 \left(\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) + (-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) dt + \int_0^1 (-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt\end{aligned}$$

der $c(t)$ er et tall mellom 0 og $-t^2$. Ser vi på bidraget fra restleddet får vi at

$$\left| \int_0^1 ((-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)},$$

siden $|e^{c(t)}| \leq 1$ (siden $c(t) \leq 0$). Skal dette være mindre enn eller lik 0.01 så må $100 \leq (n+1)!(2n+3)$. Prøver vi oss frem ser vi at minste slik n er $n = 3$, og tilnærmingen blir da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) dt &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \\ &= \frac{210 - 70 + 21 - 5}{210} = \frac{156}{210} = \frac{26}{35} \approx 0.7429.\end{aligned}$$

Oppgave 5. Vi har gitt differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1 + t, \quad x(0) = 0.$$

(Fortsettes på side 7.)

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.
Svar: Ligningen er separabel siden vi kan skrive den som $x' = (1+x)(1+t)$, som kan skrives $x'/(1+x) = 1+t$. Integrerer vi begge sider får vi at $\ln|1+x| = t+t^2/2+C$, slik at $1+x = Ke^{t+t^2/2}$ (der vi har satt $K = \pm e^C$), slik at $x(t) = Ke^{t+t^2/2}-1$. Bruker vi initialbetingelsen finner vi at $0 = K-1$, slik at $K = 1$, slik at

$$x(t) = e^{t+t^2/2} - 1.$$

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i a)? Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?
Svar: Med Eulers metode får vi at

$$x_1 = x_0 + 0.25(1+x_0)(1+t_0) = 0 + 0.25 = 0.25.$$

Løsningen fra a) gir at $x(0.25) = e^{0.25+0.25^2/2} - \approx 0.32478$, slik at avviket er 0.07478. Med Eulers midtpunkysmetode får vi først at

$$x_{1/2} = x_0 + 0.125(1+x_0)(1+t_0) = 0 + 0.125 = 0.125.$$

Deretter får vi at

$$x_1 = x_0 + 0.25(1+x_{1/2})(1+t_{1/2}) = 0.25 \cdot 1.125 \cdot 1.125 \approx 0.31641,$$

slik at avviket blir 0.0084. Det er klart at Eulers midtpunktsmetode gir minst avvik, noe som er i tråd med det vi har lært om nøyaktigheten for disse to metodene i kompendiet. Det vi lærte var at feilen i Eulers metode er proporsjonal med h, mens feilen i Eulers midtpunktsmetode er proporsjonal med h^2.

Lykke til!