UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 2. Desember 2016.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^2$?

✓**A:** $1 + 2(x - 1)$

B: $1 + (x - 1)$

C: 1

D: $x - 1$

E: $1 + x^2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = \ln x$?

A: $1 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

B: $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

C: $(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

✓**D:** $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

E: $(x - 1) - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(\sin x)$?

✓**A:** x.

B: $\cos(1)x$.

C: $\sin(1)x$.

D: 0.

E: $\sin(1)\cos(1)x$.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{2x}$

✓**B:** $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

C: $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$

D: $y(x) = xe^{2x}$

E: $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $x^2y'y^2 = 2x$ er

✓**A:** $y(x) = (6\ln x)^{1/3}$

B: $y(x) = \ln x$

C: $y(x) = (6\ln x)^{1/2}$

D: $y(x) = 3x^{1/3}$

E: $y(x) = (\ln x)^{1/3}$

Oppgave 6. Et tredjegradspolynom som interpolerer datasettet

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

er

A: $p_3(x) = 1 - x - \frac{2}{3}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

B: $p_3(x) = 1 + x + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

✓**C:** $p_3(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

D: $p_3(x) = 1 + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

E: $p_3(x) = 1 - x^2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi minner om at sekantmetoden finner tilnærminger til nullpunkter til f ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

Vi bruker sekantmetoden med startverdier $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ til å finne ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$. I første iterasjon får vi da at x_3 blir

A: $\sqrt{2}$

B: 1.9

C: 1.5

✓**D:** 4/3

E: 5/4

Oppgave 8. Vi bruker

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

for å regne ut tilnærminger til den andrederiverte. Tilnærmingen til den andrederiverte av $f(x) = x^3$ i $a = 1$ er da gitt ved

✓**A:** 6

B: $6 + h$

C: $6 - h$

D: $6 + h^2$

E: $6 - h^2$

Oppgave 9.
Vi minner om at trapesmetoden for integralet $I = \int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervaller er gitt ved

$$I \approx h\big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\big), \quad h = (b-a)/n.$$

Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 x^2 dx$$

får vi tilnærmingen

A: 33/8

B: 3

C: 8/3

D: 7/3

✓**E:** 11/2

Her var den oppgitte formelen for I i trapesmetoden feil: Vi skulle også ha delt med to (i formelsamlingen er formelen riktig), og da ville svaret blitt 11/4. Med andre ord, med den oppgitte formelen får du et av svaralternativene, men både formelen og svaralternativet burde vært delt på to.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + \sin(x^2 + x') = t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_2' = x_1, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

B: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

✓**C:** $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_2^2 + x_1) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

E: $x_1' = x_2, \quad x_2' = \sin(x_1^2 + x_2) - t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 5.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = xe^x$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$ for alle $k \geq 0$.

Svar: La P_k representere påstanden at $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$. P_0 er opplagt sann. Anta at vi har vist P_k for $k = 1 \dots n$. Vi har da at

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ((x+n)e^x)' = e^x + (x+n)e^x = (x+(n+1))e^x,$$

som viser at P_{n+1} også er sann.

b) Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av grad n til f om $a = 0$ og restleddet $R_n(x)$. Finn en N slik at for alle $n \geq N$, og for alle x i intervallet $[0,1]$, så vil feilen i $T_n(x)$ bli mindre enn 0.001.

Svar: Fra a) følger at $f^{(k)}(0) = k$, slik at Taylorrekken blir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k == \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$$

Vi har også at

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

der c er et tall mellom 0 og x. Siden $(c+n+1)e^c$ er voksende i c, så har vi for $x \in [0,1]$ at

$$|R_n(x)| \leq \frac{(n+2)e}{(n+1)!}.$$

Skal dette være mindre enn 0.001 må vi ha at $\frac{(n+2)e}{(n+1)!} < 0.001$, eller $\frac{(n+1)!}{n+2} > 1000e$. Ved å regne ut dette for forskjellige n ser vi at $n = 7$ er minste slike verdi.

Oppgave 2.

Vi har gitt differensligningen

$$12x_{n+2} - 7x_{n+1} + x_n = 6, \quad x_0 = 0, \; x_1 = 2/3.$$

a) Vis at den generelle løsningen av ligningen er

$$x_n = 1 + C4^{-n} + D3^{-n}$$

der C og D er vilkårlige konstanter. Vis også at løsningen som tilfredstiller startverdiene er $x_n = 1 - 3^{-n}$.

Svar: Den karakteristiske likningen er $12r^2 - 7r + 1 = 0$, som har røtter $r = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{24} = \frac{7 \pm 1}{24}$, som gir $r_1 = 1/4$ og $r_2 = 1/3$. Den generelle løsningen av den homogenen likningen blir dermed $x_n^h = C4^{-n} + D3^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = A$, og får da at $12A - 7A + A =$

(Fortsettes på side 6.)

$6A = 6$, slik at $A = 1$, slik at dene generelle løsningen av ligningen er $x_n = 1 + C4^{-n} + D3^{-n}$. De to initialkravene gir at

$$\begin{aligned} 1 + C + D &= 0 \\ 1 + C/4 + D/3 &= 2/3, \end{aligned}$$

som kan skrives

$$\begin{aligned} C + D &= -1 \\ 3C + 4D &= -4. \end{aligned}$$

Løser vi disse finner vi at $C = 0$ og $D = -1$, slik at $x_n = 1 - 3^{-n}$.

b) Anta at vi skal simulere ligningen på en datamaskin med 64-bits flyttall. Hvordan vil den beregnede løsningen oppføre seg for store verdier av n?
Svar: Den ene initialbetingelsen 2/3 kan ikke representeres eksakt på en datamaskin, så her blir det avrundingsfeil, slik at den beregnede løsningen vil bli på formen

$$1 - (1 + \epsilon_1)3^{-n} + \epsilon_2 4^{-n}.$$

Siden begge røttene her er mindre enn 1 i absoluttverdi så vil ikke dette føre til at man får stor absolutt feil på grunn av dette.

Oppgave 3. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \sin(t + x), \quad x(0) = \pi/2.$$

a) Finn to tilnærmede løsninger til ligningen i $t = 0.1$ ved å ta et steg med Eulers metode og et steg med Eulers midtpunktmetode.
Svar: Med Eulers metode får vi at

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = \pi/2 + 0.1\sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.1 \approx 1.6708.$$

Med Euler midtpunktmetode får vi

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 + hf(t_0, x_0)/2 = \pi/2 + 0.05\sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.05 \\ x_1 &= x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = \pi/2 + 0.1\sin(0.05 + \pi/2 + 0.05) \\ &= \pi/2 + 0.1\sin(0.1 + \pi/2) \approx 1.6703. \end{aligned}$$

I nynorskversjonen og engelskversjonen av settet ble man bedt om å finne tilnærmede løsninger til ligningen i $t = h$, i stedet for $t = 0.1$. Eulers metode gir da $x_1 = \pi/2 + h$, mens Eulers midtpunktsmetode gir $x_1 = \pi/2 + h\sin(h + \pi/2)$. Disse svarene godtas derfor også, siden det var forskjell for de forskjellige målformene.

b) Finn et uttrykk for $x''(t)$ ved å derivere begge sider av differensialligningen og regn fra dette ut $x''(0)$. Bruk dette til å finne en tilnærming til løsningen i $t = 0.1$ ved hjelp av det kvadratiske Taylor-polynomet. Finn også en verdi for h som garanterer at feilen i Eulers metode er mindre enn 0.0001.
Svar: Vi har at

$$\begin{aligned} x''(t) &= \cos(t + x)(1 + x'(t)) = \cos(t + x)(1 + \sin(t + x)) \\ &= \cos(t + x) + \cos(t + x)\sin(t + x) \\ &= \cos(t + x) + \frac{1}{2}\sin(2(t + x)), \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

slik at $x''(0) = \cos(\pi/2) + \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0$. Siden $x'(0) = \sin(\pi_2 + 0) = 1$ blir tilnærmingen til løsningen ved hjelp av det kvadratiske Taylorpolynomet dermed

$$x(t) \approx x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2 = \pi/2 + t,$$

slik at tilnærmingen blir $\pi/2+0.1$ for $t = 0.1$, som er samme tilnærmingen vi fikk som i Eulers metode. Hadde vi brukt førsteordens Taylor med restledd ville vi fått (for en c mellom 0 og t)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + x''(c)t^2/2.$$

Restleddet/feilen er her

$$R_2(t) = x''(c)t^2/2 = \left(\cos(c + x(c)) + \frac{1}{2}\sin(2(c + x(c)))\right)t^2/2,$$

der c er et tall mellom 0 og t. Siden sin og cos er mindre enn eller lik 1 i absoluttverdi, så er $|R_2(t)| \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)t^2/2 = \frac{3}{4}t^2$. For h krever vi derfor at $\frac{3}{4}h^2 < 10^{-4}$, som gir at $h < \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-2} \approx 0.0115$.

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Oppgave 4. Vi har datasettet

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	2

Finn det kvadratiske interpolasjonspolynomet p som interpolerer disse verdiene og regn ut en tilnærming til den deriverte til f i $x = 1$ ved hjelp av tilnærmingen $f'(1) \approx p'(1)$.

Svar: Newtonformen til det interpolerende polynomet er $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x-1)$. Setter vi inn funkjonsverdiene får vi ligningene

$$\begin{aligned} 1 &= c_0 \\ 0 &= c_0 + c_1 \\ 2 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2. \end{aligned}$$

$c_0 = 1$ følger fra den første likningen. Fra den andre likningen får vi at $c_1 = -1$, og fra den tredje likningen følger at $x_2 = (2 - 1 + 3)/6 = 2/3$, slik at

$$p(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1).$$

Vi får nå at $p'(x) = -1 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$, slik at tilnærmingen vår blir $p'(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$.

Lykke til!