UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 11. Desember 2020.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:30.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

er gitt ved

A: $y(x) = 3e^x - 2e^{2x}$
B: $y(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$
C: $y(x) = 4e^x - 3e^{2x}$
D: $y(x) = e^x \cos(2x)$
E: $y(x) = 2e^x - e^{2x}$

(Fortsettes på side 2.)

Svar: Den karakteristiske ligningen blir $r^2 - 3r + 2 = 0$, som har røtter $r = 1$ og $r = 2$. Den generelle løsningen er dermed $y(t) = Ce^x + De^{2x}$. Initialbetingelsene gir ligningene

$$\begin{aligned} C + D &= 1 \\ C + 2D &= 0. \end{aligned}$$

Trekker vi disse fra hverandre får vi at $D = -1$, og vi får deretter $C = 2$ Løsningen blir dermed $y(x) = 2e^x - e^{2x}$.

Oppgave 2. Vi vil finne en tilnærming til et nullpunkt for funksjonen $f(x) = x^2 - 1$. Hvis vi starter med $x_0 = 3$ og tar ett steg med Newtons metode får vi tilnærmingen

A: 2.25

B: 2

C: 5/3

D: 4/3

E: 1

Svar: Newtons metode gir at

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 1}{2x_n}.$$

Dermed får vi at

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 1}{2x_0} = 3 - \frac{9 - 1}{6} = 3 - 4/3 = 5/3.$$

Oppgave 3. Vi minner om at en tilnærming til den andrederiverte til f i punktet a er definert som

$$\big(f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)\big)/h^2.$$

Tilnærmingen til den andrederiverte av $f(x) = x^3$ i $a = 1$ med denne metoden er da gitt ved

A: $3 - h$

B: $6 - h$

C: 6

D: $6 + h$

E: $3 + h^2$

Svar: Vi setter inn for f og a og får

$$\begin{aligned} &\big(f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)\big)/h^2 \\ &= \frac{(1 + h)^3 - 2 \cdot 1^3 + (1 - h)^3}{h^2} \\ &= \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 + 1 - 3h + 3h^2 - h^3}{h^2} \\ &= \frac{6h^2}{h^2} = 6. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4. Newton-formen til andregradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^2$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ er

A: $p_2(x) = x - x(x-1)$

B: $p_2(x) = x + x(x-1)$

C: $p_2(x) = 1 + x + x(x-1)$

D: $p_2(x) = x(x-1)$

E: $p_2(x) = 1 - x/2 + x(x-1)/6$

Svar: Vi skriver $p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$ og får først

$$p_2(0) = f(0) = 0 = c_0.$$

Deretter får vi

$$p_2(1) = f(1) = 1 = c_0 + c_1 = c_1,$$

slik at $c_1 = 1$. Til slutt får vi

$$p_2(2) = f(2) = 4 = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 2 + 2c_2,$$

slik at $c_2 = 1$. Dermed får vi at $p_2(x) = x + x(x-1)$.

Oppgave 5. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin x$. Den minste verdien av n vi kan velge slik at restleddet $\left|R_n f(x)\right| \leq 0.01$ for alle $x \in [0, 1/3]$ blir da

A: $n = 2$.

B: $n = 3$.

C: $n = 4$.

D: $n = 5$.

E: $n = 6$.

Svar: Restleddet av orden n er begrenset av $\left|\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!3^{n+1}}$. Vi må derfor velge n slik at $(n+1)!3^{n+1} \geq 100$. Prøver vi oss frem ser vi at $n = 2$ er minste slik n.

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k) = n(n+1)^2$$

for alle $n \geq 1$.

Svar: Vi lar P_n være påstanden $\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k) = n(n+1)^2$. P_1 er sann siden vi får 4 på begge sider når vi setter $n = 1$. Anta så at P_n er sann for et vilkårlig valg av $n \geq 1$. For å fullføre induksjonsbeviset trenger vi vise at også P_{n+1} er sann. Vi har at

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2+k) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2+k) + (3(n+1)^2+(n+1)) \\
&= n(n+1)^2 + (3(n+1)^2+(n+1)) \\
&= (n+1)(n(n+1)+3(n+1)+1) = (n+1)(n^2+4n+4) \\
&= (n+1)(n+2)^2 = (n+1)((n+1)+1)^2),
\end{aligned}$$

slik at P_{n+1} også er sann. Det følger at P_n er sann for alle n.

Oppgave 2. (Kun MAT-INF1100) Vi skal se på differensligningen

$$3x_{n+2} - 7x_{n+1} + 2x_n = -6, \quad x_0 = 2, x_1 = 8/3.$$

a) Finn løsningen av differensligningen.

Svar: Den karakteristiske ligningen blir $3r^2 - 7r + 2 = 0$, som har røtter $r = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6} = \frac{7\pm 5}{6}$, slik at røttene blir 2 og 1/3. Den homogene ligningen har derfor den generelle løsningen $x_n^h = C2^n + D3^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = A$, og finner da at $3A - 7A + 2A = -2A = -6$, slik at $A = 3$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^p + x_n^h = 3 + C2^n + D3^{-n}$. Initialverdiene gir ligningene

$$\begin{aligned}
2 &= 3 + C + D \\
8/3 &= 3 + 2C + D/3.
\end{aligned}$$

Løser vi disse finner vi at $C = 0$, $D = -1$, slik at $x_n = 3 - 3^{-n}$.

b) Hva skjer for store n når denne differensligningen simuleres på en datamaskin med 64 bits flyttall?

Svar: På grunn av avrundingsfeil i initialbetingelsene vil maskinen regne ut $x_n = 3 - (1+\hat{\epsilon})3^{-n} + \hat{\epsilon}2^n$, og for store n vil dette gi overflow. For neste n ser vi at vi også vil få overflow. Neste gang (og etter det) vil vi få NaN (not a number), siden maskinen regner ut et uttrykk av typen $\infty - \infty$. Ved testing med Python 3 på en datamaskin fant vi at dette intreffer etter rundt 1080 iterasjoner.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 3 MAT-INF1100. Oppgave 2 MAT-IN1105 I denne oppgaven skal vi teste ulike numeriske metoder for å beregne integralet

$$\int_0^\pi x^{1/2} \sin x \, dx \tag{1}$$

a) Regn ut den tilnærmede verdien til integralet ved hjelp av trapesmetoden med tre delintervaller.

Svar: Funksjonsverdiene i delepunktene er

$$\sqrt{0}\sin 0 = 0 \qquad \sqrt{\pi/3}\sin(\pi/3) = \sqrt{\pi}/2$$
$$\sqrt{2\pi/3}\sin(2\pi/3) = \sqrt{\pi/2} \qquad \sqrt{\pi}\sin\pi = 0.$$

Tilnærmingen vi får med trapesmetoden blir dermed

$$\frac{\pi}{3}((0+0)/2 + \sqrt{\pi}/2 + \sqrt{\pi/2}) \approx 2.2405.$$

b) Finn en tilnærming til integralet (1) ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylor-polynom av grad 5 om $a = 0$, det vil si bruk tilnærmingen

$$\int_0^\pi x^{1/2} \sin x \, dx \approx \int_0^\pi x^{1/2} T_5 \sin x \, dx.$$

Svar: Vi har at $T_5 \sin x = x - x^3/6 + x^5/120$, slik at

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^{1/2} T_5 \sin x \, dx &= \int_0^\pi (x^{3/2} - x^{7/2}/6 + x^{11/2}/120) \, dx \\
&= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{27}x^{9/2} + \frac{1}{780}x^{13/2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{5}\pi^{5/2} - \frac{1}{27}\pi^{9/2} + \frac{1}{780}\pi^{13/2} \approx 2.7874.
\end{aligned}$$

c) Bruk restleddet i Taylors formel til å finne en øvre grense for feilen i tilnærmingen i b), det vil si

$$\left| \int_0^\pi x^{1/2} \sin x \, dx - \int_0^\pi x^{1/2} T_5 \sin x \, dx \right|.$$

Anta at vi erstatter T_5 med et Taylor-polynom av grad n. Hvor stor må n være for at feilen skal bli mindre enn 0.01?

Svar: Vi har at $x^{1/2} \sin x = x^{1/2} T_n \sin x + x^{1/2} R_n \sin x$, der $|R_n \sin x| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (her brukte vi at alle de deriverte av $\sin x$ er begrenset av 1 i absoluttverdi). Setter vi inn i integralet får vi at

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^\pi x^{1/2} \sin x \, dx - \int_0^\pi x^{1/2} T_n \sin x \, dx \right| \\
&= \left| \int_0^\pi x^{1/2} R_n \sin x \, dx \right| \\
&\leq \int_0^\pi x^{1/2} |R_n \sin x| \, dx \leq \int_0^\pi x^{1/2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \, dx \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^\pi x^{n+3/2} \, dx = \frac{1}{(n+1)!(n+5/2)} \left[x^{n+5/2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^{n+5/2}}{(n+1)!(n+5/2)}.
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 6.)

Setter vi inn $n = 5$ får vi at feilen er begrenset av 0.9914. I dette tilfellet er Taylorpolynomet av grad 5 lik Taylorpolynomet av grad 6, og for $n = 6$ er feilen begrenset av 0.3926. Vi godkjenner verdiene for både $n = 5$ og $n = 6$ her. For å få feilen mindre enn 0.01 må vi velge n slik at $\frac{\pi^{n+5/2}}{(n+1)!(n+5/2)} \leq 0.01$. Prøver vi oss frem ser vi at $n = 10$ er den minste slike verdien. Siden $T_9 \sin x = T_{10} \sin x$ følger det at vi kan velge $n = 9$. Man kan vise at integralet blir ≈ 2.4353.

Oppgave 4 MAT-INF1100. **Oppgave 3 MAT-IN1105** Finn løsningen av differensialligningen

$$x' = e^{-x} \cos t, \quad x(0) = 0.$$

Finn også en tilnærming til løsningen i $t = \pi/4$ ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen tilnærming ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hvilken av de to metodene gir minst avvik fra den eksakte løsningen du fant? Forklar hvorfor dette er som forventet, eventuelt ikke som forventet.

Svar: Dette er en separabel differensialligning. Vi skriver den først som $e^x x' = \cos t$, og integrerer begge sider og får $e^x = \sin t + C$. Setter vi inn $t = x = 0$ får vi at $C = 1$, slik at $e^x = \sin t + 1$. Tar vi logaritmer får vi at $x(t) = \ln(\sin t + 1)$. Vi har spesielt at $x(\pi/4) = \ln(\sqrt{2}/2 + 1) \approx 0.5348$.

Eulers metode gir at $x_1 = x_0 + \frac{\pi}{4} e^{-x_0} \cos t_0 = \pi(4) \approx 0.7854$. Eulers midtpunktsmetode gir $x_{1/2} = \pi/8$, $x_1 = \pi/4(e^{-\pi/8} \cos(\pi/8)) \approx 0.4900$.

Eulers midtpunktsmetode gir minst avvik fra den eksakte løsningen over et fast tidsintervall når h er liten nok. Grunnen er at Eulers metode kan utledes fra en forlengsdifferanse approksimasjon av $x'(t)$, som har feil $O(h)$, mens Eulers midtpunktsmetode kan utledes fra en sentraldifferanse approksimasjon av $x'(t)$, som har feil $O(h^2)$. Vi vet ikke om $h = \pi/4$ er liten nok her. Men det er å forvente at feilen i det tilfeldige tidspunktet $t = \pi/4$ med ett iterasjonssteg er mindre for Euler midtpunkt enn for Euler.

Oppgave 4 MAT-IN1105

a) Skriv en funksjon `euler(f, a, b, x0, N)` som finner en tilnærming til $x(b)$ ved å ta N steg med Eulers metode for differensialligningen $x'(t) = f(t, x)$. Initialbetingelsen er $x(a)$ =`x0`. Funksjonen `euler` skal altså anta at `f` er en funksjon som tar to parametre, svarende til høyresiden i differensialligningen.

b) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av Eulers metode er riktig ved å kalle `euler` med $f(t, x) = e^{-x} \cos t$, $N = 100$, $a = 0$, og $b = \pi/4$. Vi antar at implementasjonen er riktig hvis avviket mellom den eksakte løsningen du fant i Oppgave 3 og resultatet fra Eulers metode er mindre enn 0.01 (hvis du ikke fant den eksakte løsningen i oppgave 3, bruk en annen funksjon du selv velger). Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Svar:

```
from math import *

def euler(f, a, b, x0, N):
    h = float(b - a)/N
```

(Fortsettes på side 7.)

```
    t = a
    x = x0
    for k in range(N):
        x += h*f(t, x)
        t += h
    return x

def f(t,x):
    return exp(-x)*cos(t)

def test_euler():
    exact = log(sqrt(2)/2+1)
    computed = euler(f, 0, pi/4, 0, 100)

    assert abs(computed - exact) <= 0.01 , 'error between exact and \
    computed value is %s' % (computed-exact)

if __name__ == '__main__':
    test_euler()
```

Lykke til!