UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 3. Desember 2021.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Alle.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 5 flervalgsoppgaver som teller 6 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Du vil få to poeng for å markere riktig svaralternativ, og inntil fire poeng for begrunnelse ved regning av hvordan du kommer fram til svaret.

Oppgave 1. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 6y' + 9y = 18x + 15, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 3$$

er gitt ved

A: $y(x) = xe^{3x} + 2x + 3$
B: $y(x) = e^{3x} + 2$
C: $y(x) = 2x + 3$
D: $y(x) = xe^{3x} + 18x + 15$
E: $y(x) = 2xe^{3x} - e^{3x}$

(Fortsettes på side 2.)

Svar: For å finne en partikluærløsning prøver vi med $y(x) = Ax + B$. Venstresiden blir da

$$-6A + 9(Ax + B) = 9Ax - 6A + 9B,$$

og dette er lik $18x + 15$ når $A = 2$ og $B = 3$. Dermed er $y_p(x) = 2x + 3$ en partikulær løsning.
Den karakteristiske ligningen blir $r^2 - 6r + 9 = 0$, som har dobbelroten $r = 3$. Den generelle homogene løsningen er dermed $y(x) = Ce^{3x} + Dxe^{3x}$, og den generelle løsningen er

$$y(x) = Ce^{3x} + Dxe^{3x} + 2x + 3.$$

Siden $y'(x) = 3Ce^{3x} + (3Dx + D)e^{3x} + 2$ så gir initialbetingelsene ligningene

$$\begin{aligned} C + 3 &= 3 \\ 3C + D + 2 &= 3, \end{aligned}$$

som gir $C = 0$ og $D = 1$. Løsningen blir dermed $y(x) = xe^{3x} + 2x + 3$.

Oppgave 2. Vi vil finne en tilnærming til et nullpunkt for funksjonen $f(x) = x^3 - 2$. Hvis vi starter med $x_0 = 3$ og $x_1 = 2$ og tar ett steg med sekantmetoden får vi at tilnærmingen x_2 er:

A: 2

B: 31/19

C: 32/19

D: 32/21

E: 33/21

Svar: Sekantmetoden gir

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) = 2 - \frac{2 - 3}{2^3 - 3^3} 6 = 2 - \frac{6}{19} = \frac{32}{19}.$$

Oppgave 3. Hvis vi bruker trapesmetoden med to delintervaller for å regne ut en tilnærming til

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi x)}{4x + 1}\, dx$$

får vi

A: $\frac{1}{4}$

B: $\frac{7}{24}$

C: $\frac{1}{8}$

D: $\frac{5}{48}$

E: $\frac{7}{48}$

Svar: Tilnærmingen er

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi x)}{4x + 1}\, dx \approx h \left(\frac{f(0) + f(1/2)}{2} + f(1/4) \right),$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor $h = 1/4$ og $f(x) = \sin^2(\pi x)/(4x+1)$. Siden

$$f(0) = 0, \quad f(1/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{4 \cdot (1/4) + 1} = \frac{1}{4}, \quad f(1/2) = \frac{1}{4 \cdot (1/2) + 1} = \frac{1}{3},$$

får vi

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi x)}{4x+1}\, dx \approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{48}.$$

Oppgave 4. Newtonformen til andregradspolynomet $p(x)$ som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, og $p(3) = 1$ er

A: $p(x) = 2 + x - x(x-1)$
B: $p(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x(x-1)$
C: $p(x) = 1 + 2x - x(x-1)$
D: $p(x) = 1 + \frac{2}{3}x - x^2$
E: $p(x) = 2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}x^2$

Svar: Newtonformen til p er

$$p(x) = c_0 + c_1(x-0) + c_2(x-0)(x-1) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1),$$

og vi finner koeffisientene c_0, c_1, c_2 rekursivt. Betingelsen $p(0) = 2$ gir $c_0 = 2$. Betingelsen $p(1) = 2$ gir $c_0 + c_1 = 3$, og da er $c_1 = 1$. Betingelsen $p(3) = 1$ gir $c_0 + 3c_1 + 6c_2 = 1$, og da er $c_2 = (1-5)/6 = -2/3$. Dermed er

$$p(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x(x-1).$$

Oppgave 5. Vi approksimerer funksjonen $f(x) = e^{-4x}$ for x i intervallet $[0, 1/2]$ ved å bruke Taylorpolynomet til f av orden n om punktet $a = 0$. For hvilken verdi av n kan du garantere at feilen er mindre enn 0.01?

A: $n = 3$
B: $n = 4$
C: $n = 5$
D: $n = 6$
E: $n = 7$

Svar: Fra formelarket kan vi skrive restleddet på formen

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) x^{n+1}}{(n+1)!},$$

hvor $c \in (0, 1/2)$. Ved å derivere f får vi at $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} 4^{n+1} e^{-4x}$, og siden $c \geq 0$, har vi at

$$|f^{(n+1)}(c)| = 4^{n+1} e^{-4c} \leq 4^{n+1}.$$

Da har vi begrensningen

$$|R_n f(x)| \leq \frac{4^{n+1} 2^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},$$

der vi brukte at $|x| \leq 1/2$. Det er derfor tilstrekkelig å velge n slik at $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0.01$. Prøver vi oss frem med kalkulator finner vi at $n = 7$ er den minste n som tilfredsstiller denne siste ulikheten.

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$\binom{2n}{n} < 2^{2n-2}, \text{ for alle } n \geq 5.$$

Vi minner om at binomialkoeffisientene er definert ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Svar: Vi lar P_n være påstanden $\binom{2n}{n} < 2^{2n-2}$. For $n = 5$ får vi

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$$
$$2^8 = 256.$$

Det følger at P_5 er sann.
Anta så at P_n er sann for et vilkårlig valg av $n \geq 5$. For å fullføre induksjonsbeviset trenger vi vise at også P_{n+1} er sann. Da får vi at

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)n! \cdot n!} \\
&= 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} \\
&< 2 \cdot 2\binom{2n}{n} < 2^2 2^{2n-2} = 2^{2(n+1)-2},
\end{aligned}$$

slik at P_{n+1} også er sann. Det følger at P_n er sann for alle n.

Oppgave 2. (Kun MAT-INF1100) Vi skal se på differensligningen

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = -1, \quad x_0 = 4/3, x_1 = 7/6.$$

a) Finn løsningen av differensligningen.
Svar: Den karakteristiske ligningen blir $2r^2 - 5r + 2 = 0$, som har røtter $r = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, slik at røttene blir 2 og 1/2. Den homogene ligningen har derfor den generelle løsningen $x_n^h = C2^n + D2^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = A$, og finner da at $2A - 5A + 2A = -A = -1$, slik at $A = 1$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^p + x_n^h = 1 + C2^n + D2^{-n}$. Initialverdiene gir ligningene

$$\frac{4}{3} = 1 + C + D$$
$$\frac{7}{6} = 1 + 2C + \frac{1}{2}D.$$

Løser vi disse finner vi at $C = 0$, $D = 1/3$, slik at $x_n = 1 + \frac{1}{3}2^{-n}$.

(Fortsettes på side 5.)

b) Hva skjer for store n når denne differensligningen beregnes numerisk på en datamaskin med 64 bits flyttall?
Svar: Initialbetingelsene kan her ikke representeres eksakt i totallsystemet. På grunn av dette vil datamaskinen i stedet regne ut

$$\bar{x}_n = 1 + \epsilon_1 2^n + \left(\frac{1}{3} + \epsilon_2\right) 2^{-n},$$

der ϵ_1 og ϵ_2 er små tall. Til å begynne med vil dette gi oss tall som nærmer seg 1, men etterhvert vil denne trenden snu. Tallene vil til slutt gi overflow for en stor verdi av n, på grunn av bidraget fra 2^n.
Hvis det ovenstående påpekes bør det gis full score. Det teller positivt på helhetsinntrykket hvis i tillegg følgende påpekes: Differensligningen regner ut

$$x_{n+2} = \frac{5}{2}x_{n+1} - x_n - 1/2.$$

Når dette gir overflow vil neste overflow ha samme fortegn. Deretter vil det regnes ut noe på formen $\infty - \infty$, som gir NaN. Pythonprogrammet under viste at dette inntreffer etter ca. 1077 iterasjoner.

```
xpp = 4/3
xp  = 7/6
for k in range(1100):
    x = 2.5*xp - xpp - 0.5
    xpp= xp
    xp = x
    print(k, x)
```

Oppgave 2. (Kun MAT-IN1105) Man kan vise at funksjonen $f(x) = xe^x$ har Taylorrekke av orden n om 0 som er

$$T_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$$

a) Skriv en funksjon `T(x,n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n f(x)$. Du kan bruke funksjonen `math.factorial(k)` til å regne ut $k!$.
b) Skriv en testfunksjon som kaller funksjonen `T(x,n)` med $x = 1$, og $n = 7$ som parametre. Testfunksjonen skal feile hvis
`abs(val - f(1))>0.01`
der `val` er estimatet som ble returnert fra `T(x,n)`, og `f` er funksjonen i oppgaven. Med andre ord, testfunksjonen skal verifisere at Taylorpolynomet av orden $n = 7$ er en rimelig tilnærming til f i $x = 1$. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement).
Svar: Følgende kode løser begge deloppgavene:

```
from math import *

def T(x, n):
    sum = 0
    for k in range(1,n+1):
        sum += x**k/factorial(k-1)
```

```
    return sum

def f(x):
    return x*exp(x)

def test_T():
    x = 1
    n = 7
    assert abs(f(x) - T(x,n)) <= 1E-2 , 'error'

if __name__ == '__main__':
    test_T()
```

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi teste to numeriske metoder for å approksimere integralet

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx. \tag{1}$$

Den eksakte verdien av integralet, med 5 sifres presisjon, er 1.3179.

a) Regn ut en tilnærmet verdi av integralet (1) ved hjelp av midtpunktsmetoden med to delintervaller.

Svar: Tilnærmingen er

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx \approx h(f(1/4) + f(3/4)),$$

hvor $h = 1/2$ og $f(x) = (e^x - 1)/x$. Vi har

$$f(1/4) = 4(e^{1/4} - 1), \qquad f(3/4) = \frac{4}{3}(e^{3/4} - 1).$$

Tilnærmingen blir dermed

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx \approx \frac{1}{2}\left(4(e^{1/4} - 1) + \frac{4}{3}(e^{3/4} - 1)\right) \approx 1.3127.$$

b) Finn en tilnærming til integralet (1) ved å erstatte e^x med sitt Taylorpolynom av orden 3 om $a = 0$, det vil si bruk tilnærmingen

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx \approx \int_0^1 \frac{T_3 e^x - 1}{x}\, dx.$$

Hvilken av de to metodene i **a)** og **b)** gir den beste tilnærming?

Svar: Siden

$$T_3 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

har vi at

$$\frac{T_3 e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!},$$

og tilnærmingen blir dermed

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx &\approx \left[x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 3!} \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{47}{36} \approx 1.3056.\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Tilnærmingen i **a)** er bedre enn den i **b)**.

Oppgave 4. Vi skal se på differensialligningen

$$x' = \frac{t^2}{x^2} e^{-x^3}, \quad x(0) = 1.$$

a) Finn løsningen av differensialligningen.
Svar: Ligningen er separabel og vi skriver den om til

$$x^2 e^{x^3} x' = t^2.$$

Integrerer vi begge sider får vi $\frac{1}{3}e^{x^3} = \frac{1}{3}t^3 + C$, slik at $x^3 = \ln(t^3 + D)$ hvor $D = 3C$. Setter vi inn initialbetingelsen ser vi at $\ln D = 1$, slik at $D = e$. Det følger at $x(t) = (\ln(t^3 + e))^{1/3}$.

b) Finn en tilnærming til løsningen i $t = 1$ ved å ta ett steg med Eulers metode med steglengde $h = 1$. Finn også en tilnærming til løsningen i $t = 1$ ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode, igjen med $h = 1$. Finn også avvikene fra den eksakte løsningen du fant i **a)**.
Svar: Eulers metode er

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0),$$

hvor $f(t,x) = t^2 e^{-x^3}/x^2$ og $t_0 = 0$ og $x_0 = 1$. Dette gir

$$x_1 = x_0 + 1 \cdot 0 = x_0 = 1.$$

Eulers midtpunktsmetode er

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 + (h/2)f(t_0, x_0), \\ x_1 &= x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}), \end{aligned}$$

hvor $t_{1/2} = t_0 + (h/2) = 0.5$. Dette gir

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_0 + 0.5 \cdot 0 = x_0 = 1, \\ x_1 &= x_0 + 1 \cdot 0.5^2 \cdot e^{-1} = 1 + 0.25 \cdot e^{-1} \approx 1.0920 \end{aligned}$$

Den eksakte løsningen er $x(0.5) = (\ln(1 + e))^{1/3} \approx 1.0951$. Avviket med Eulers metode blir da ≈ 0.0951, mens avviket med Eulers midtpunktsmetode blir $\approx |1.0951 - 1.0920| \approx 0.0031$.

Lykke til!