UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.

Eksamensdag: Mandag 5. Desember 2022.

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 12 sider.

Vedlegg: Formelark. Svarark.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene dine føres på svararket.

Oppgave 1. Løsningen av differensiallikningen

$$y' + 5y = e^{3x}, \quad y(0) = \frac{1}{4}$$

er gitt ved

A: $y(x) = x^5 + 1/4$

B: $y(x) = e^{3x} - 3/4$

C: $y(x) = \cos(5x)/4$

D: $y(x) = \arctan(x + \pi/4)/4$

✓**E:** $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$

Svar: Her man man først observere at den homogene ligningen har generell løsning $y^h(x) = e^{-5x}$. Hvis vi prøver $y^p(x) = Ae^{3x}$ som partikulær løsning, så må $3A + 5A = 1$, slik at $A = 1/8$. Den generelle løsningen er derfor $y(x) = y^p(x) + y^h(x) = \frac{1}{8}e^{3x} + Ce^{-5x}$. Bruker vi initialbetingelsen får vi at $\frac{1}{8} + C = \frac{1}{4}$, slik at $C = \frac{1}{8}$. Dette gir $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$.
Oppgaven kan også løses med metoden for integrerende faktor (se seksjon 10.1 i Kalkulus). Multipliserer vi med e^{5x} på begge sider får vi

$$(ye^{5x})' = e^{8x}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Integrasjon gir

$$y(x) = \frac{e^{3x}}{8} + Ce^{-5x}$$

og $y(0) = 1/4 \implies C = 1/8$. Løsningen blir igjen $y(x) = (e^{3x} + e^{-5x})/8$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 2. Vi ønsker å finne en tilnærming til nullpunktet til funksjonen $f(x) = e^{2x} - 2$. Hvis vi starter med $a_0 = 0$ og $b_0 = 1$ og itererer to steg med halveringsmetoden, så er midtpunktet $m_2 = (a_2 + b_2)/2$ lik

A: $1/8$

B: $1/3$

C: $5/8$

D: 1

✓**E:** $3/8$

Svar: Med $m_0 = 1/2$ impliserer $f(a_0)f(m_0) < 0$ at $b_1 = m_0 = 1/2$ og $a_1 = a_0 = 0$.
Med $m_1 = 1/4$ gir $f(m_1) = e^{1/2} - 2 = \sqrt{2.71828\ldots} - 2 < 0$ og dermed $f(b_1)f(m_1) < 0$, og at $a_2 = m_1 = 1/4$, $b_2 = b_1 = 1/2$.
Løsningen er $m_2 = (a_2 + b_2)/2 = 3/8$.

Oppgave 3. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

om punktet $a = 1$ er gitt ved

A: $1 + 2x + 3x^2$

B: $1 + x + x^2/2$

C: $1 - (x - 1) + (x - 1)^2/2$

✓**D:** $10 + 20(x - 1) + 15(x - 1)^2$

E: $1 - x^2$

Svar: Vi har at

$$T_2 f(x; a = 1) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2} f''(1)(x - 1)^2,$$

hvor $f(1) = 10$, $f'(1) = 20$, $f''(1) = 30$. Løsningen er

$$T_2 f(x) = 10 + 20(x - 1) + 15(x - 1)^2.$$

Oppgave 4. For andregradspolynomet $p(x)$ som tilfredsstiller interpolasjonsbetingelsene $p(0) = 1$, $p(2) = 4$, og $p(3) = 1$ er verdien til $p'(1)$ lik

✓**A:** $p'(1) = 3/2$

B: $p'(1) = 1$

C: $p'(1) = -1/2$

D: $p'(1) = -1$

E: $p'(1) = 1/3$

Svar: Vi bestemmer først polynomet. Newtonformen til p er

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x - 2)$$

Betingelsen $p(0) = 1$ gir $c_0 = 1$. Betingelsen $p(2) = 4$ gir $c_0 + 2c_1 = 4$, og da er $c_1 = 3/2$. Betingelsen $p(3) = 1$ gir $c_0 + 3c_1 + 3c_2 = 1$, og da er $c_2 = -c_1 = -3/2$. Dermed er

$$p(x) = 1 + 3x/2 - 3x(x - 2)/2 = 1 + 9x/2 - 3x^2/2 \quad \text{og} \quad p'(x) = 9/2 - 3x,$$

(Fortsettes på side 4.)

som gir løsningen $p'(1) = 3/2$.

Man kan også løse denne oppgaven uten å bruke Newtonformen. Skriver vi polynomet på formen $p(x) = ax^2 + bx + c$ så gir $p(0) = 1$ at $c = 1$. Fra de to andre punktene får vi så at

$$\begin{aligned} 3 &= 4a + 2b \\ 0 &= 9a + 3b \end{aligned}$$

Setter vi inn $b = -3a$ i den første ligningen får vi at $3 = 4a - 6a = -2a$, slik at $a = -3/2$, og $b = 9/2$. Det følger at $p(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, slik at $p'(x) = -3x + \frac{9}{2}$, slik at $p'(1) = 3/2$

Oppgave 5. Vi lager en tilnærming til integralet

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^2} dx$$

ved å bruke trapesmetoden med tre delintervaller (steglendge $h = 1$). Dette gir verdien

A: 7/3

B: 13/5

✓**C:** 5/4

D: 11/5

E: 3/2

Svar: Vi har delepunktene $x_k = k$ for $k = 0, 1, 2, 3$. For integralet over med integranden $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ gir trapesregelen

$$\begin{aligned} I_{trap}(h) &= h\left(\frac{f(0) + f(3)}{2} + f(1) + f(2)\right) \\ &= \frac{1 + 1/10}{2} + 1/2 + 1/5 \\ &= \frac{11}{20} + \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 6. Taylorpolynomet av grad 3 av funksjonen

$$f(x) = e^{\sin(x)-x}$$

om punktet $a = 0$ er lik

A: $1 + (\sin(x) - x) + \frac{1}{2}(\sin(x) - x)^2 + \frac{1}{6}(\sin(x) - x)^3$

B: $1 + x + x^2/2 + x^3/6$

C: $1 + x^2 - x^3/6$

✓**D:** $1 - x^3/6$

E: 1

Svar: Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x - 1)e^{\sin(x)-x} \\ f''(x) &= (-\sin(x) + (\cos(x) - 1)^2)e^{\sin(x)-x} \\ f'''(x) &= \big(-\cos(x) - 3\sin(x)(\cos(x) - 1) + (\cos(x) - 1)^3\big)e^{\sin(x)-x}. \end{aligned}$$

Det følger at $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$, og $f'''(0) = -1$, slik at Taylorpolynomet blir

$$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 = 1 - x^3/6.$$

Oppgave 7. Løsningen til differensiallikningen

$$y'' - y' - 6y = 3x - \frac{3}{2}, \qquad y(0) = 1/3, \quad y'(0) = 2$$

er lik

✓**A:** $y(x) = (e^{3x} - e^{-2x})/2 + 1/3 - x/2$

B: $y(x) = 2x + 1/3$

C: $y(x) = e^{3x} - e^{-2x} + 1/3 + x$

D: $y(x) = e^{-2x} - 2/3 + 4x$

E: $y(x) = \cos(x) - e^{-2x} + 1/3$

Svar: Den karakteristiske likningen

$$r^2 - r - 6 = 0$$

har røtter $r = -2$ og $r = 3$. Den generelle løsningen til den homogene likningen er dermed

$$y_h(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Siden 0 ikke er en rot til den karakteristiske likningen finnes en partikulærløsning er på formen $y_p(x) = c_0 + c_1 x$ hvor c_0 og c_1 må bestemmes. Vi ønsker at

$$y_p'' - y_p' - 6y_p = -c_1 - 6c_0 - 6c_1 x = 3x + \frac{3}{2}$$

som gir $c_1 = -1/2$ og $c_0 = 1/3$ og $y_p = 1/3 - x/2$. Den generelle løsningen til den inhomogene likningen er

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{-2x} + Be^{3x} + 1/3 - x/2.$$

(Fortsettes på side 6.)

Konstantene bestemmes fra initialbetingelsene. Observer først at

$$y'(x) = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x} - 1/2$$

Initialbetingelsene gir følgende likninger for A og B:

$$\begin{aligned} 1/3 &= y(0) = A + B + 1/3 \\ 2 &= y'(0) = -2A + 3B - 1/2 \end{aligned}$$

Første likning gir $B = -A$, og setter vi inn i andre, får vi

$$-5A = 5/2 \implies A = -1/2 \quad \text{og} \quad B = 1/2$$

Løsningen er

$$y(x) = \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x}{2}.$$

Oppgave 8. Omskriving av annenordens differensiallikningen

$$x'' + (t + x^2)x' - e^{2t}x = \sin(t)$$

til et system av førsteordens differensiallikninger gir

A: $x' = y + \sin(t)$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x$

✓**B:** $x' = y$ og $y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t)$

C: $x' = y$ og $y' = y$

D: $x' = y - ty + e^{2t}x$ og $y' = x^2y + \sin(t)$

E: $x' = y$ og $y' = (t + x^2)y - e^{2t}x$

Svar: Vi introduserer funksjonen $y = x'$. Får da

$$y' = (x')' = x'' = -(t + x^2)x' + e^{2t}x + \sin(t) = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t).$$

Det gir systemet

$$x' = y, \quad y' = -(t + x^2)y + e^{2t}x + \sin(t).$$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 9. Den numeriske løsningen av

$$(1+t)x' = xe^t \quad x(0) = 1$$

ved tiden $t = 1$ som vi får ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode med steglengde $h = 1$ er lik

A: $x_1 = 2$

B: $x_1 = 1 + h + h^2/2$

✓**C:** $x_1 = 1 + e^{1/2}$

D: $x_1 = (1 + e)/2$

E: $x_1 = 1 + e$

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Svar: Omskriving gir

$$x' = \frac{e^t x}{(1+t)} =: f(t, x)$$

og Eulers midtpunktmetode er gitt ved

$$x_{1/2} = x_0 + (h/2)f(t_0, x_0), \quad x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2})$$

hvor $x_0 = 1$, $t_0 = 0$ og $t_{1/2} = h/2$. Det gir

$$x_{1/2} = 1 + (h/2) \times \frac{1}{1+0} = \frac{3}{2}$$

og

$$x_1 = x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = 1 + \frac{(3/2)e^{1/2}}{1 + 1/2} = 1 + e^{1/2}.$$

Oppgave 10. La funksjonen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ være slik at dens deriverte tilfredsstiller

$$\max_{x \in [-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leq n^2 \qquad \text{for alle} \quad n \geq 1.$$

La $T_n f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 0$.
Vi søker minste $n \geq 0$ slik at vi kan være sikre på at

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - T_n f(x)| < 10^{-3}.$$

Svaret er

A: $n = 2$

B: $n = 4$

C: $n = 6$

✓**D:** $n = 8$

E: $n = 10$

(Fortsettes på side 8.)

Svar: Restleddsformelen sier at

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - T_n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)||x-a|^{n+1} \leq \frac{n+1}{n!}.$$

Søker minste n slik at

$$\frac{n!}{n+1} > 1000 \implies n = 8$$

siden $7!/8 = 630$ og $8!/9 = 4480$.

(Fortsettes på side 9.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at

$$2^{n+1} > n^2, \text{ for alle } n \geq 3.$$

Svar: Vi lar P_n være påstanden $2^{n+1} > n^2$. For $n = 3$ sier påstanden at $16 > 9$, som er sant. Anta nå at vi har vist at $P_3, P_4, ..., P_n$ er sanne, der $n \geq 3$. Vi får da at

$$2^{(n+1)+1} = 2 \cdot 2^{n+1} > 2n^2 = 2\frac{n^2}{(n+1)^2}(n+1)^2 > (n+1)^2,$$

der vi brukte at $2\frac{n^2}{(n+1)^2} > 1$ (dette kan skrives om til $\sqrt{2} > 1 + 1/n$, som opplagt holder for $n \geq 3$). Det følger at P_{n+1} også er sann. Dermed er P_n sann for alle n.

Oppgave 2. Vi skal se på differenslikningen

$$8x_{n+2} - 33x_{n+1} + 4x_n = 21n - 4, \quad x_0 = 9, x_1 = 1.$$

a) Finn løsningen av differenslikningen.

Svar: Den karakteristiske likningen blir $8r^2 - 33r + 4 = 0$, som har røtter $r = \frac{33\pm\sqrt{1089-128}}{16} = \frac{33\pm 31}{16}$, slik at røttene blir 4 og 1/8. Den homogene likningen har derfor den generelle løsningen $x_n^h = C4^n + D8^{-n}$. For å finne en partikulær løsning prøver vi $x_n^p = An + B$, og finner da at

$$\begin{aligned}&8(A(n+2)) + B) - 33(A(n+1) + B) + 4(An + B)\\&= -21An + (-17A - 21B)\\&= 21n - 4.\end{aligned}$$

Løser vi dette ser vi at $A = -1$, $B = 1$, slik at $x_n^p = -n + 1$. Den generelle løsningen blir dermed $x_n = x_n^p + x_n^h = -n + 1 + C4^n + D8^{-n}$. Initialverdiene gir likningene

$$\begin{aligned}9 &= 1 + C + D\\1 &= 0 + 4C + \frac{1}{8}D.\end{aligned}$$

Løser vi disse finner vi at $C = 0$, $D = 8$, slik at $x_n = -n + 1 + 8^{1-n}$.

b) Hva skjer for store n når denne differenslikningen beregnes numerisk på en datamaskin med 64 bits flyttall?

Svar: Initialbetingelsene kan representeres eksakt i totallsystemet. Maskinen regner ut

$$x_{n+2} = (33x_{n+1} - 4x_n + 21n - 4)/8,$$

og dette blir regnet ut uten avrundingsfeil siden $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. Men siden tallene etterhvert blir for store vil vi etter hvert få en overflow uansett. Dette vil

(Fortsettes på side 10.)

imidlertid skje etter fryktelig mange iterasjoner, siden x_n går veldig sakte mot ∞. Siden $x_n = -n + 1 + 8^{1-n}$ vil bruke minst 3 nye bits etter hver iterasjon (med 53 bits for signifikanden så vil vi få avrundingsfeil etter mindre enn 20 iterasjoner), så vil vi få avrundingsfeil før vi får overflow. Da vil den andre roten $C4^n$ bidra også, som vil dra det hele fortere mot uendelig. Vi krever ikke at du vet dette, men det er et pluss hvis begge ting påpekes.

Pythonprogrammet under kan brukes ved simulering.

```
xpp = 9
xp= 1

for n in range(1000):
    x = (33*xp-4*xpp +21*n -4)/8
    print (x)
    xpp = xp
    xp = x
```

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi se på en ny metode for numerisk derivasjon. Vi ser bort fra avrundingsfeil. Vi er gitt et generelt tredjegradspolynom $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Vis at, for alle $h > 0$, så er

$$f'(0) - \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = 2a_3h^2,$$

Hva kan du si om denne tilnærmingen til $f'(0)$ når f er et andregradspolynom?

Svar: Med $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ får vi

$$\begin{aligned}
&\frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} \\
&= \frac{-3a_0 + 4(a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0) - (8a_3h^3 + 4a_2h^2 + 2a_1h + a_0)}{2h} \\
&= \frac{-4a_3h^3 + 2a_1h}{2h} = -2a_3h^2n + a_1 = -2a_3h^2 + f'(0).
\end{aligned}$$

der h^2-leddene, og konstantleddene i telleren, kansellerte. Resultatet følger ved å isolere $2a_3h^2$ på en side.

Hvis f er et andregradspolynom så er $a_3 = 0$, og da sier denne formelen at tilnærmingen er eksakt:

$$f'(0) = \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h}.$$

Man kan også løse oppgaven ved å sjekke at formelen er riktig for $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, og $f(x) = x^3$, og forklare at den da også må stemme for alle tredjegradspolynomer på grunn av linearitet:

- Verdien for $(-3f(0)+4f(h)-f(2h))/2h$ for disse fire blir $0, 1, 0, -2h^2$, respektive.
- Verdien for $f'(0)$ for disse fire blir $0, 1, 0, 0$, respektive

(Fortsettes på side 11.)

Differensene mellom disse blir $0, 0, 0, 2h^2$, som blir $2a_3h^2$, siden her er verdiene for a_3 $0, 0, 0, 1$.

Man kan også løse oppgaven ved å bruke Taylorpolynomer. Taylorutviklingen av grad 2 til f om 0 med restledd gir (innsatt $x = h$ og $x = 2h$)

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + f''(0)h^2/2 + R_2f(h)$$
$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + R_2f(2h)$$

Restleddformelen gir $R_2f(h) = \frac{f'''(c)}{3!}h^3$, der c er et tall mellom 0 og h. Siden $f'''(x) = 6a_3$ for alle x, så har vi at $R_2f(h) = a_3h^3$, og også $R_2f(2h) = 8a_3h^3$. Ligningene over kan derfor skrives

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + f''(0)h^2/2 + a_3h^3$$
$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + 8a_3h^3$$

Vi kan her eliminere $f''(0)$ ved å gange den første ligningen med 4, og trekke ligningene fra hverandre:

$$4f(h) - f(2h) = 3f(0) + 2f'(0)h - 4a_3h^3.$$

Dette gir

$$f'(0) - \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} = 2a_3h^2.$$

Resultatet følger nå ved å ta absoluttverdi.

Oppgave 4. Vi skal se på funksjonen $f(x) = 3 + 2x - x^2 + x^3$. Bestem det unike interpolasjonspolynomet av grad ≤ 2 som tilfredsstiller

$$p(-1) = f(-1), \quad p(0) = f(0) \quad \text{og} \quad p(2) = f(2),$$

Svar: Newtonformen til polynomet er

$$p(x) = c_0 + c_1(x + 1) + c_2(x + 1)x.$$

Rekursiv løsing gir

$$p(-1) = c_0 \quad \text{og} \quad p(-1) = f(-1) = -1 \implies c_0 = -1,$$

$$p(0) = c_0 + c_1 \quad \text{og} \quad p(0) = f(0) = 3 \implies c_0 + c_1 = 3 \implies c_1 = 4.$$

$$p(2) = c_0+3c_1+6c_2 \quad \text{og} \quad p(2) = f(2) = 11 \implies c_0+3c_1+6c_2 = 11 \implies c_2 = 0.$$

Løsningen er

$$p(x) = -1 + 4(x + 1)$$

Oppgave 5. Vi skal se på differensiallikningen

$$x' = \frac{x}{1 + 4t^2} \qquad t \geq 0, \quad \text{med initialbetingelsen} \quad x(0) = 1.$$

(Fortsettes på side 12.)

a) Finn løsningen til differensiallikningen.
Svar: likningen er separabel og vi skriver den om til

$$\frac{1}{x}x' = \frac{1}{1+4t^2}.$$

Vi integrerer begge sider

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{1+4t^2}dt,$$

og får

$$\ln|x| = \frac{\arctan(2t)}{2} + C \implies |x| = e^{\arctan(2t)/2+C} \implies x(t) = De^{\arctan(2t)/2},$$

hvor konstanten $D = \pm e^C$ bestemmes fra initialbetingelsen

$$1 = x(0) = De^{\arctan(0)/2} = De^0 \implies D = 1.$$

Løsningen er

$$x(t) = e^{\arctan(2t)/2}.$$

b) Det kan vises at $x(1/2) = e^{\pi/8} \approx 1.48097$ for den eksakte løsningen til differensiallikningen.
Finn en tilnærming til løsningen ved tiden $t = 1/2$ ved å ta to steg med Eulers metode med steglengden $h = 1/4$. Hvor stor er approksimasjonsfeilen

$$|x_2 - x(1/2)| \ ?$$

(x_2 betegner den numeriske løsningen ved $t = 1/2$).
Svar: Eulers metode er

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k),$$

hvor $f(t,x) = x/(1+4t^2)$, $t_k = kh$ og $x_0 = 1$. Det gir

$$x_1 = 1 + \frac{1}{4} \times \frac{x_0}{1+0} = 5/4,$$

og

$$x_2 = x_1 + \frac{1}{4} \times \frac{x_1}{1+4t_1^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{5/4}{5/4} = \frac{3}{2}.$$

Approksimasjonsfeilen er

$$|x_2 - x(1/2)| \approx |1.5 - 1.480973| \approx 0.019$$

Lykke til!