UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100 — Modellering og beregninger.
Eksamensdag:	Tirsdag 12. Desember 2023.
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00.
Oppgavesettet er på 10 sider.	
Vedlegg:	Formelark. Svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenen består av to deler: flervalgsoppgaver (totalt 30 poeng) og tradisjonelle oppgaver (totalt 70 poeng).

Del 1: Flervalgsoppgaver

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene dine føres på svararket.

Oppgave 1. Taylorpolynomet av grad 2 til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3}$$

om punktet $a = -1$ er gitt ved

A: $\frac{1}{2} + 2(x+1) - \frac{3}{16}(x+1)^2$
B: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$
✓**C:** $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{8}(x+1)^2$
D: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$
E: $1 + \frac{3}{2}(x+1) - \frac{3}{8}(x+1)^2$

Svar: Vi har at

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(1 - x^3)^2}$$
$$f''(x) = \frac{6x(1 - x^3)^2 + 18x^4(1 - x^3)}{(1 - x^3)^4} = \frac{6x + 12x^4}{(1 - x^3)^3}$$

(Fortsettes på side 2.)

Vi får også at $f(-1) = 1/2$, $f'(-1) = 3/4$, $f''(-1) = 3/4$, slik at

$$\begin{aligned} T_2 f(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2} f''(-1)(x+1)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{8}(x+1)^2. \end{aligned}$$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 av funksjonen

$$f(x) = e^{-x^3}$$

om punktet $a = 0$ er lik

A: $1 + x^3/2$

B: $1 + x^2/2$

C: $1 - x^3/2$

✓**D:** $1 - x^3$

E: $1 + x^3$

Svar: Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 e^{-x^3} \\ f''(x) &= (-6x + 9x^4) e^{-x^3} \\ f'''(x) &= (-6 + 36x^3 + 18x^3 - 27x^6) e^{-x^3} = (-6 + 54x^3 - 27x^6) e^{-x^3}. \end{aligned}$$

Det følger at $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$, og $f'''(0) = -6$, slik at Taylorpolynomet blir

$$T_3 f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + f'''(0)x^3/6 = 1 - x^3.$$

Man kan også se dette ved å sette inn $-x^3$ for x i Taylorpolynomet for e^x. Dette gir $1 - x^3 + x^6/2! + \cdots$.

Oppgave 3. La $f(x) = x^3 - x - 1$, og la $p_2(x)$ være polynomet av grad ≤ 2 som interpolerer f i $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, og $x_2 = 3$. Da er $\int_1^3 p_2(x)\,dx$ lik

A: 10

B: 29/2

✓**C:** 14

D: 17

E: 3

Svar: Vi bestemmer først polynomet. Newtonformen til p er

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2).$$

Setter vi inn interpolasjonspunktene får vi likningene

$$\begin{aligned} -1 &= c_0 \\ 5 &= c_0 + c_1 \\ 23 &= c_0 + 2c_1 + 2c_2 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

Den andre likningen gir at $c_1 = 6$, og den tredje gir at $c_2 = (23 - c_0 - 2c_1)2 = 6$, slik at

$$p_2(x) = -1 + 6(x-1) + 6(x-1)(x-2).$$

Når vi integrerer denne er det kanskje like greit å gange ut først, og da får vi $p_2(x) = 6x^2 - 12x + 5$. Vi får så

$$\int_1^3 p_2(x)\,dx = \left[2x^3 - 6x^2 + 5x\right]_1^3 = (54 - 54 + 15) - (2 - 6 + 5) = 15 - 1 = 14.$$

Man kan også løse denne metoden ved å bruke at Simpsons metode er eksakt for alle tredjegradspolynomer (se Teorem 12.12 i boka), slik at $\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 p_2(x)\,dx$. Vi får at

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 = (81/4 - 9/2 - 3) - (1/4 - 1/2 - 1) = 56/4 = 14.$$

Enda enklere, i stedet for å regne ut integralet kan vi bruke punktformelen for Simpsons metode, som med $h = 1$ gir

$$\frac{1}{3}(f(1) + 4f(2) + f(3)) = \frac{-1 + 20 + 23}{3} = 14.$$

Oppgave 4. Vi ønsker å finne en tilnærming til nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^5 + x + 1$. Hvis vi starter med $x_0 = 0$ og tar to steg med Newtons metode, så får vi at x_2 blir

A: $-3/2$

✓**B:** $-5/6$

C: $1/4$

D: $-1/2$

E: -1

Svar: Newtons metode her blir $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^5 + x_k + 1}{5x_k^4 + 1}$. Vi får at

- $x_1 = 0 - \frac{1}{1} = -1$
- $x_2 = -1 - \frac{-1-1+1}{5+1} = -1 + 1/6 = -5/6$

Oppgave 5. Tilnærmingen til

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)\,dx$$

vi får når vi bruker midtpunktsmetoden med fire delintervaller (steglendge $h = 1/2$) blir

✓**A:** $(\sqrt{2} + 1)/2$

B: $-1/2$

C: $\sqrt{2}$

D: 1

E: $\sqrt{2} + 1$

(Fortsettes på side 4.)

Svar: Vi har intervalldelepunktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$, $x_4 = 2$. Dette gir midtpunktene 1/4, 3/4, 5/4, og 9/4. Funksjonsverdiene i disse er

1. $\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
2. $\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin(\pi/2) = 1$
3. $\sin\left(\frac{5\pi}{8}x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$
4. $\sin\left(\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin \pi = 0$

For integralet over gir dermed mindtpunktsmetoden

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}/2 + 1 + \sqrt{2}/2 + 0 = (\sqrt{2} + 1)/2$$

Oppgave 6. Løsningen av differensiallikningen

$$y' - 3y = 2xe^x, \quad y(0) = 0$$

er gitt ved

A: $y(x) = (x + 1/2)e^x - e^{3x}/2$
B: $y(x) = -e^x/2 + e^{3x}/2$
C: $y(x) = xe^x + e^{3x} - 1$
✓**D:** $y(x) = -(x + 1/2)e^x + e^{3x}/2$
E: $y(x) = -(x + 1/2)e^x + e^{3x}$

Svar: Den homogene ligningen har generell løsning $y^h(x) = Ce^{3x}$. Hvis vi prøver $y_p(x) = (Ax + B)e^x$ som partikulær løsning, så får vi

$$y_p' - 3y_p = (Ax + A + B)e^x - 3(Ax + B)e^x = (-2Ax + A - 2B)e^x.$$

Skal dette være lik $2xe^x$ så må

$$-2A = 2 \qquad\qquad A - 2B = 0,$$

som har løsningen $A = -1$, $B = -1/2$. Derfor blir $y_p(x) = -(x+1/2)e^x$, og den generelle løsningen er $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -(x + 1/2)e^x + Ce^{3x}$. Initialbetingelsen gir så at $-1/2 + C = 0$, slik at $C = 1/2$, slik at $y(x) = -(x + 1/2)e^x + e^{3x}/2$.

Oppgave 7. Løsningen til differensiallikningen

$$y'' - 6y' = -12x - 16, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

er lik

✓**A:** $y(x) = x^2 + 3x + 1 - e^{6x}$
B: $y(x) = x^2 + 3x - 1 + e^{6x}$
C: $y(x) = x^2 + 3x - e^{6x}$
D: $y(x) = e^{-6x} - 1$
E: $y(x) = 3x - 1 + e^{-6x}$

(Fortsettes på side 5.)

Svar: Den karakteristiske likningen

$$r^2 - 6r = 0$$

har røtter $r = 6$ og $r = 0$. Den generelle løsningen til den homogene likningen er dermed

$$y_h(x) = Ce^{6x} + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Siden 0 er en rot i den karakteristiske likningen må vi her gå opp en grad når vi skal gjette på en partikulær løsning, slik at vi må gjette $y_p(x) = Ax^2 + Bx$ hvor A og B må bestemmes. Vi har at

$$y_p'' - 6y_p' = 2A - 12Ax - 6B = -12Ax + 2A - 6B = -12x - 16$$

som gir $A = 1$ og $B = 3$, slik at $y_p(x) = x^2 + 3x$. Den generelle løsningen på likningen blir dermed $y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x^2 + 3x + Ce^{6x} + D$. Initialbetingelsene gir så at (siden $y'(x) = 2x + 3 + 6Ce^{6x}$)

$$\begin{aligned} y(0) &= C + D = 0 \\ y'(0) &= 3 + 6C = -3 \end{aligned}$$

Andre likning gir at $C = -1$. Første likning gir så $D = 1$, slik at

$$y(x) = x^2 + 3x - e^{6x} + 1$$

Oppgave 8. Den numeriske løsningen av

$$x^2 x' = t^3 \quad x(1) = 1$$

ved tiden $t = 2$ som vi får ved å ta to steg med Eulers metode med steglengde $h = 1/2$ er lik

A: $x_2 = 3/2$

✓**B:** $x_2 = 9/4$

C: $x_2 = 11/4$

D: $x_2 = 1$

E: $x_2 = 5/2$

Svar: Omskriving gir

$$x' = \frac{t^3}{x^2} =: f(t, x)$$

og Eulers metode gir

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1^3}{1^2} = \frac{3}{2} \\ x_2 &= x_1 + hf(t_1, x_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\frac{(3/2)^3}{(3/2)^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 9. Omskriving av annenordens differensiallikningen

$$x'' + \sqrt{x'} - e^{tx} = \ln t$$

til et system av førsteordens differensiallikninger gir

A: $x' = y + \ln t$ og $y' = -\sqrt{y}e^{tx}$

✓**B:** $x' = y$ og $y' = -\sqrt{y} + e^{tx} + \ln t$

C: $x' = y$ og $y' = \sqrt{y} - e^{tx} + \ln t$

D: $x' = -\sqrt{y} + \ln t$ og $y' = e^{tx}$

E: $x' = y$ og $y' = -\sqrt{y} + e^{tx}$

Svar: Vi introduserer funksjonen $y = x'$ og får

$$y' = (x')' = x'' = -\sqrt{x'} + e^{tx} + \ln t = -\sqrt{y} + e^{tx} + \ln t.$$

Det gir systemet

$$x' = y, \quad y' = -\sqrt{y} + e^{tx} + \ln t.$$

Oppgave 10. Vi definerer $f(x) = \cos(x)e^x$, og lar $T_n f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n om punktet $a = 0$.
Hva er minste $n \geq 0$ slik at vi kan være sikre på at

$$\max_{x\in[-1/2,1/2]} |f(x) - T_n f(x)| \leq 0.02?$$

A: $n = 0$

B: $n = 1$

C: $n = 2$

✓**D:** $n = 3$

E: $n = 4$

Svar: Vi har at

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x - \sin x)e^x \\ f''(x) &= -2\sin x e^x \\ f'''(x) &= -2(\sin x + \cos x)e^x \\ f^{(4)}(x) &= -4\cos x e^x \end{aligned}$$

På $[-1/2, 1/2]$ er disse begrenset av $2e^{1/2}$, $2e^{1/2}$, $4e^{1/2}$, $4e^{1/2}$. Dette betyr at

- $|R_0 f(x)| \leq 2e^{1/2}0.5/1! = e^{1/2} \approx 1.649$
- $|R_1 f(x)| \leq 2e^{1/2}0.5^2/2! = e^{1/2}/4 \approx 0.4122$
- $|R_2 f(x)| \leq 4e^{1/2}0.5^3/3! = e^{1/2}/12 \approx 0.1374$
- $|R_3 f(x)| \leq 4e^{1/2}0.5^4/4! = e^{1/2}/96 \approx 0.0172$

Vi ser at $|R_3 f(x)|$ er første restledd som garantert blir ≤ 0.02 i absoluttverdi, slik at $n = 3$ er riktig svar.

(Fortsettes på side 7.)

Del 2

Denne delen består av 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. Du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at $n^3 + 2n$ er delelig med 3 for alle $n \geq 1$.
Svar: Vi lar P_n være påstanden at $n^3 + 2n$ er delelig med 3. For $n = 1$ sier påstanden at 3 er delelig med 3, som er sant. Anta nå at vi har vist at $P_1, P_2, ..., P_k$ er sanne, der $k \geq 1$. Vi må vise at P_{k+1} også er sann, det vil si at $(k+1)^3 + 2(k+1)$ også er delelig med 3. Vi får at

$$(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3k^2 + 3k + 3.$$

I denne summen er $k^3 + 2k$ delelig med 3 (siden P_k er antatt sann), mens de andre leddene ($3k^2$, $3k$, 3) alle er delelig med 3. $(k+1)^3 + 2(k+1)$ kan altså skrives som en sum av tall som alle er delelige med 3. Men da er også $(k+1)^3 + 2(k+1)$ delelig med 3, slik at P_{k+1} også er sann. Det følger at P_n er sann for alle $n \geq 1$.

Oppgave 2. Vi skal se på differenslikningen

$$32x_{n+2} - 12x_{n+1} + x_n = 0, \quad x_0 = 2, x_1 = 3/8.$$

a) Finn løsningen av differenslikningen.
Svar: Den karakteristiske likningen blir $32r^2 - 12r + 1 = 0$, som har røtter $r = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{64} = \frac{12 \pm 4}{64}$, slik at røttene blir 1/4 og 1/8. Likningen har derfor den generelle løsningen $x_n^h = C4^{-n} + D8^{-n}$. Initialbetingelsene gir

$$\begin{aligned} 2 &= C + D \\ 3/8 &= C/4 + D/8. \end{aligned}$$

Gander vi opp den andre likningen med 8 kan disse skrives

$$\begin{aligned} 2 &= C + D \\ 3 &= 2C + D. \end{aligned}$$

Trekker vi disse fra hverandre får vi at $C = 1$, og deretter at $D = 1$, slik at løsningen blir $x_n = 4^{-n} + 8^{-n}$.

b) Hva skjer for store n når denne differenslikningen beregnes numerisk på en datamaskin med 64 bits flyttall?
Svar: Initialbetingelsene kan representeres eksakt i totallsystemet. Maskinen regner ut

$$x_{n+2} = (12x_{n+1} - x_n)/32,$$

og dette blir regnet ut uten avrundingsfeil siden $32 = 2^5$. Maskinen vil derfor regne ut $x_n = 4^{-n} + 8^{-n}$ eksakt til å begynne med. Siden $4^{-n} + 8^{-n}$ trenger $n+1$ signifikante bits, så vil vi på et eller annet tidspunkt få en avrundingsfeil (til 4^{-n}). Denne avrundingsfeilen vil forplante seg videre slik at maskinen vil regne ut noe på formen

$$(1 + \epsilon_1)4^{-n} + (1 + \epsilon_2)8^{-n}.$$

(Fortsettes på side 8.)

Det er vanskelig å spå om maskinen til slutt vil runde alt av til 0 eller ikke, men det er nærliggende å tro dette siden formelen som simuleres regner ut tall der absoluttverdien avtar mot 0. Simulerer vi på datamaskin vil vi se at alt blir 0 etter rundt 540 iterasjoner.

Pythonprogrammet under kan brukes ved simulering.

```
xpp = 2
xp= 3/8

for n in range(540):
    x = (12*xp-xpp)/32
    print (x)
    xpp = xp
    xp = x
```

Oppgave 3. Vi skal se på følgende tilnærming til den deriverte til en funksjon f i et punkt a:

$$f'(a) \approx \frac{-4f(a-h)+3f(a)+f(a+2h)}{6h}$$

Vis at denne tilnærmingen er eksakt for alle andregradspolynomer.

Svar: Det er kanskje enklest å vise først at formelen er riktig for $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$.

1. $f(x)=1$: Tilnærmingen gir $\frac{-4+3+1}{6h}=0$, som er lik $f'(a)$.
2. $f(x)=x$: Tilnærmingen gir $\frac{-4(a-h)+3a+(a+2h)}{6h}=\frac{6h}{6h}=1$, som er lik $f'(a)$.
3. $f(x)=x^2$: Tilnærmingen gir $\frac{-4(a-h)^2+3a^2+(a+2h)^2}{6h}=\frac{8ah+4ah}{6h}=2a$, som er lik $f'(a)$.

Man kan deretter forklare at, hvis tilnærmingen er eksakt for funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, så er den også eksakt for $cf(x)$ og for $f(x)+g(x)$:

1. $$\begin{aligned}(cf)'(a) = cf'(a) &= c\frac{-4f(a-h)+3f(a)+f(a+2h)}{6h}\\ &= \frac{-4(cf)(a-h)+3(cf)(a)+(cf)(a+2h)}{6h}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a)+g'(a)\\ &= \frac{-4f(a-h)+3f(a)+f(a+2h)}{6h}+\frac{-4g(a-h)+3g(a)+g(a+2h)}{6h}\\ &= \frac{-4(f+g)(a-h)+3(f+g)(a)+(f+g)(a+2h)}{6h}\end{aligned}$$

Siden ethvert andregradspolynom kan skrives på formen ax^2+bx+c, følger det fra dette at tilnærmingen er eksakt for alle andregradspolynomer.

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 4. Finn tilnærmingen til $\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ som du får ved å erstatte $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad 5 om origo, det vil si regn ut $\int_1^2 \frac{T_5 \sin(x)}{x}\,dx$.

Svar: Vi har at $T_5 \sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5!$, slik at

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{T_5\sin(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{x - x^3/3! + x^5/5!}{x}\,dx &= \int_1^2 (1 - x^2/6 + x^4/120)\,dx \\ &= \left[x - x^3/18 + x^5/600\right]_1^2 \\ &= 1 - (8/18 - 1/18) + (2^5 - 1)/600 \\ &= 1 - 7/18 + 31/600 \\ &= \frac{1800 - 700 + 93}{1800} = \frac{1193}{1800}.\end{aligned}$$

Oppgave 5. Vi skal se på differensiallikningen

$$x' = \frac{t^2}{x}e^{t^3 - x^2} \qquad t \geq 1, \quad \text{med initialbetingelsen} \quad x(1) = 1.$$

a) Finn løsningen til differensiallikningen.

Svar: likningen er separabel og vi skriver den om til

$$xe^{x^2}x' = t^2e^{t^3}.$$

Vi integrerer begge sider

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int t^2e^{t^3}\,dt,$$

og får

$$\frac{1}{2}e^{x^2} = \frac{1}{3}e^{t^3} + C.$$

Dette gir $e^{x^2} = \frac{2}{3}e^{t^3} + 2C$, og deretter $x^2 = \ln\left(\frac{2}{3}e^{t^3} + 2C\right)$, og til slutt $x(t) = \pm\sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}e^{t^3} + 2C\right)}$. Det er klart fra likningen at $x' \geq 0$, og siden $x(1) = 1$ er det klart at $x \geq 0$ for $t \geq 1$. Derfor har vi at $x(t) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}e^{t^3} + 2C\right)}$

C må bestemmes fra initialbetingelsen $x(1) = 1$. Setter vi inn $t = 1$ og $x = 1$ får vi at $1 = \ln\left(\frac{2}{3}e + 2C\right)$, slik at $e = \frac{2}{3}e + 2C$, slik at $2C = e/3$. Derfor er løsningen

$$x(t) = \sqrt{\ln\left(\frac{2}{3}e^{t^3} + e/3\right)}.$$

Spesielt er $x(1.5) \approx 1.7364$

b) Det kan vises at $x(1.5) \approx 1.7364$ for den eksakte løsningen til differensiallikningen.

Finn en tilnærming til løsningen ved tiden $t = 1.5$ ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hvor stor er approksimasjonsfeilen

$$|x_1 - x(1.5)|\ ?$$

(x_1 betegner den numeriske løsningen ved $t = 1.5$).

(Fortsettes på side 10.)

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Svar: Eulers midtpunktsmetode med $h = 1/2$ og $f(t, x) = \frac{t^2}{x} e^{t^3 - x^2}$ gir

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= x_0 + \frac{1}{4} f(t_0, x_0) = 1 + \frac{1}{4}\frac{1}{1} = \frac{5}{4} \\
x_1 &= x_0 + \frac{1}{2} f(t_{1/2}, x_{1/2}) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{(5/4)^2}{5/4} e^{125/64 - 25/16} \\
&= 1 + \frac{5}{8} e^{25/64} \approx 1.9237.
\end{aligned}$$

Approksimasjonsfeilen er

$$|1.9237 - 1.7364)| \approx |1.1042 - 1.1626| \approx 0.1873$$

Lykke til!