UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 5. Desember 2014.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \ln(x + 1)$?

A: 0

B: $x^2/2$

C: x

D: $x + x^2/2$

✓**E:** $x - x^2/2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = \pi$ for funksjonen $f(x) = \sin x$?

A: $(x - \pi) - (x - \pi)^3/6$

B: $-x^2/2$

C: $-(x - \pi)^3/3$

✓**D:** $-(x - \pi) + (x - \pi)^3/6$

E: $x - x^3/3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Anta at vi beregner Taylor-polynomet av grad n om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi si om feilleddet $R_n(x)$?

A: Feilleddet vil for hver x gå mot uendelig når n går mot uendelig.

✓**B:** For alle reelle tall x vil feilleddet gå mot 0 når n går mot uendelig.

C: Feilleddet er 0 overalt.

D: Feilleddet vil gå mot 0 når n går mot uendelig for alle x i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av x.

E: For alle n og alle reelle tall x vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{-x} + e^{-3x}$

✓**B:** $y(x) = e^{x} + e^{3x}$

C: $y(x) = e^{x} + 2e^{3x}$

D: $y(x) = 2e^{x} + e^{3x}$

E: $y(x) = 2e^{x}$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $y' + y^2x^2 = 0$ er

✓**A:** $y(x) = 1/(x^3/3 + 1)$

B: $y(x) = 1/(1 - x^3/3)$

C: $y(x) = 1/(x^3 + 1)$

D: $y(x) = 1/(x^2/3 - 1)$

E: $y(x) = e^{-x^3/3+1}$

Oppgave 6. Newton-formen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = (x-1)^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$ er

A: $p_3(x) = -1 - x + x(x-1)(x-2)$

✓**B:** $p_3(x) = -1 + x + x(x-1)(x-2)$

C: $p_3(x) = -1 + x - x(x-1)(x-2)$

D: $p_3(x) = 1 + x + x(x-1)(x-2)$

E: $p_3(x) = -1 + 2x + 2x(x-1)(x-2)$

Oppgave 7. Vi tar to steg med Newtons metode for $f(x) = x^2 - 2$, og starter i $x_0 = 1$. Da får vi

A: $x_2 = 7/5$

B: $x_2 = 3/2$

✓**C:** $x_2 = 17/12$

D: $x_2 = 1$

E: $x_2 = 15/12$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a))/h,$$

og at den symmetriske Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h) - f(a-h))/(2h).$$

Hvilken av følgende påstander om numerisk derivasjon er sann?

A: Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle tredjegradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

B: Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

✓**C:** Den symmetriske Newton-kvotienten gir den deriverte eksakt for alle andregradspolynomer, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

D: Vi trenger ikke ta hensyn til avrundingsfeil når vi gjør numerisk derivasjon.

E: Både Newton-kvotienten og den symmetriske Newton-kvotienten gir en feil av størrelse $h^2/6$, hvis man ikke tar hensyn til avrundingsfeil.

Oppgave 9. Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut $\int_0^2 x^2 dx$ får vi

A: 5/2

B: 8/3

C: 11/2

✓**D:** 11/4

E: 3

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + (\sin t)x' + 5x = \tan t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

B: $x_1' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t, \quad x_2' = x_1$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

C: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 + 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = (\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 1$

✓**E:** $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(\sin t)x_2 - 5x_1 + \tan t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at, for alle $n \geq 1$, så er

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n n(n+1)/2.$$

Svar: La P_n være induksjonspåstanden. P_n er opplagt sann for $n = 1$. Anta så at P_k er sann for $k = 1, 2, \ldots, n$. Vi får at

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n n(n+1)/2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n (n+1)(n/2 - (n+1)) \\
&= (-1)^n (n+1)(-1 - n/2) = (-1)^{n+1}(n+1)(n+2)/2.
\end{aligned}$$

Dermed er P_{n+1} også sann, og vi har fullført induksjonsbeviset.

Oppgave 2.
Svar: Følgende kode kan brukes, som løser begge deloppgavene

```python
from math import sqrt
import sys

def trapes(f, a, b, N):
    h = (b-a)/float(N)
    s = (f(a) + f(b))/2.
    x = a + h
    for k in range(1,N):
        s += f(x)
        x += h
    s *= h
    return s

def test_trapes(c, d):
    exact = 2*c + 2*d

    def f(x):
         return c*x + d

    s = trapes(f, 0, 2, 2**5)
    assert abs(s - exact) <= 1E-8 , 'error between exact and \
    estimated values is %s' % (s-exact)
```

a) Skriv en funksjon `trapes(f, a, b, N)` som regner ut tilnærmingen til $\int_a^b f(x)dx$ vi får ved å bruke trapesmetoden med N like store delintervaller.

(Fortsettes på side 5.)

b) Skriv en testfunksjon som tar to parametre, `c` og `d`, og som bruker metoden `trapes` til å regne ut en tilnærming til $\int_0^2 (cx+d)dx$ ved hjelp av trapesmetoden med $N = 2^5$ delintervaller. Testfunksjonen skal teste om tilnærmingen avviker med mindre enn 10^{-8} fra den eksakte verdien for integralet. Hvis dette ikke er tilfelle skal du skrive en feilmelding på skjermen. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 3.

a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad n, $T_n(x)$, til funksjonen $f(x) = e^x$ om 0. Skriv også opp et uttrykk for restleddet $R_n(x)$.

Svar: Alle de deriverte er $f^{(n)}(x) = e^x$, slik at $f^{(n)}(0) = 1$. Dermed blir Taylorrekka

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!,$$

og restleddet kan skrives som

$$R_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!,$$

der c er et tall mellom 0 og x.

b) Bruk Taylorrekka med restledd fra a) til å regne ut $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ med en nøyaktighet på 0.01.

Svar: Vi setter inn $x = -t^2$ i $T_n(x)$ og får

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t^2}dt &= \int_0^1 \left(\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) + (-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) dt + \int_0^1 (-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt\end{aligned}$$

der $c(t)$ er et tall mellom 0 og $-t^2$. Ser vi på bidraget fra restleddet får vi at

$$\left| \int_0^1 ((-1)^{n+1} e^{c(t)} \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{(n+1)!} dt = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)},$$

siden $|e^{c(t)}| \leq 1$ (siden $c(t) \leq 0$). Skal dette være mindre enn eller lik 0.01 så må $100 \leq (n+1)!(2n+3)$. Prøver vi oss frem ser vi at minste slik n er $n = 3$, og tilnærmingen blir da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!} \right) dt &= \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \\ &= \frac{210 - 70 + 21 - 5}{210} = \frac{156}{210} = \frac{26}{35} \approx 0.7429.\end{aligned}$$

Oppgave 4. Vi har gitt differensialligningen

$$x' - (1+t)x = 1 + t, \quad x(0) = 0.$$

(Fortsettes på side 6.)

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.
Svar: Ligningen er separabel siden vi kan skrive den som $x' = (1+x)(1+t)$, som kan skrives $x'/(1+x) = 1+t$. Integrerer vi begge sider får vi at $\ln|1+x| = t + t^2/2 + C$, slik at $1 + x = Ke^{t+t^2/2}$ (der vi har satt $K = \pm e^C$), slik at $x(t) = Ke^{t+t^2/2} - 1$. Bruker vi initialbetingelsen finner vi at $0 = K - 1$, slik at $K = 1$, slik at

$$x(t) = e^{t+t^2/2} - 1.$$

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.25$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i a)? Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?
Svar: Med Eulers metode får vi at

$$x_1 = x_0 + 0.25(1 + x_0)(1 + t_0) = 0 + 0.25 = 0.25.$$

Løsningen fra a) gir at $x(0.25) = e^{0.25+0.25^2/2} - \approx 0.32478$, slik at avviket er 0.07478. Med Eulers midtpunktsmetode får vi først at

$$x_{1/2} = x_0 + 0.125(1 + x_0)(1 + t_0) = 0 + 0.125 = 0.125.$$

Deretter får vi at

$$x_1 = x_0 + 0.25(1 + x_{1/2})(1 + t_{1/2}) = 0.25 \cdot 1.125 \cdot 1.125 \approx 0.31641,$$

slik at avviket blir 0.0084. Det er klart at Eulers midtpunktsmetode gir minst avvik, noe som er i tråd med det vi har lært om nøyaktigheten for disse to metodene i kompendiet. Det vi lærte var at feilen i Eulers metode er proporsjonal med h, mens feilen i Eulers midtpunktsmetode er proporsjonal med h^2.

Lykke til!