# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger. Prøveeksamen 1 |
| Eksamensdag: | Onsdag 14. November 2014. |
| Tid for eksamen: | 9:00 – 13:00. |
| Oppgavesettet er på 6 sider. | |
| Vedlegg: | Formelark. |
| Tillatte hjelpemidler: | Godkjent kalkulator. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
*Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

### Del 1: Flervalgsoppgaver

**Oppgave 1.** Hva er Taylorpolynomet om $a = 0$ av grad 2 for funksjonen $f(x) = x^3$?

☐ $x^3$

☐ $x^2$

☒ $0$

☐ $x$

☐ $1 + 3x + 6x^2$

**Oppgave 2.** Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = -1$ for funksjonen $f(x) = x^4$.

☐ $3 + 9x + 7x^2$

☒ $3 + 8x + 6x^2$

☐ $-x$

☐ $x^2$

☐ $x^4$

(Fortsettes på side 2.)

**Oppgave 3.** Anta at vi beregner Taylorpolynomet av grad $n$ om punktet $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \cos x$. Hva kan vi da si om feilleddet $R_n(x)$?

☐ Feilleddet vil for hver $x$ bli større når $n$ øker

☒ For ethvert reelt tall $x$ vil feilleddet gå mot 0 når $n$ går mot $\infty$

☐ Feilleddet er 0 overalt

☐ Feilleddet vil gå mot 0 for alle $x$ i intervallet $[-\pi, \pi]$, men ikke for andre verdier av $x$

☐ For alle $n$ og alle reelle tall $x$ vil absoluttverdien til feilleddet være mindre enn 1

**Oppgave 4.** En løsning av differensialligningen $y'' + y = 0$ er

☐ $y(x) = e^x$

☐ $y(x) = \sin 2x$

☒ $y(x) = \sin x + \cos x$

☐ $y(x) = \cos x^2$

☐ $y(x) = \tan x$

**Oppgave 5.** Løsningen av differensialligningen

$$y' + xy = x, \quad y(0) = 0,$$

er gitt ved

☐ $y(x) = x$

☐ $y(x) = x^2$

☐ $y(x) = x/(1 + x)$

☒ $y(x) = 1 - e^{-x^2/2}$

☐ $y = \sin x$

**Oppgave 6.** Newton-formen til tredjegradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = x^3$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$ er

☐ $p_3(x) = x - 3x(x - 1)$

☐ $p_3(x) = x + 3x(x - 1) + 12x(x - 1)(x - 2)$

☐ $p_3(x) = x(x - 1) + 2x(x - 1)(x - 2)$

☒ $p_3(x) = x + 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2)$

☐ $p_3(x) = x - 3x(x - 1) + x(x - 1)(x - 2)$

**Oppgave 7.** Vi ser på tre numeriske metoder for å finne nullpunkter for funksjoner: halveringsmetoden, sekantmetoden og Newtons metode. Hvilke (n) av disse metodene vil alltid gi liten feil, uavhengig av antall iterasjoner, og for alle førstegradspolynom?

☐ Bare halveringsmetoden

☐ Bare sekantmetoden

☐ Bare Newtons metode

☐ Bare Newtons metode og halveringsmetoden

☒ Bare sekantmetoden og Newtons metode

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 8.** Vi skal beregne en tilnærming til den andrederiverte $f''(0)$ til en funksjon $f(x)$ ved hjelp av tilnærmingen

$$f''(0) \approx \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}.$$

Hvis vi ser bort fra avrundingsfeil så fins det et naturlig tall $d$ slik at denne tilnærmingen er eksakt for polynomer av grad $d$, men ikke grad $d+1$. Verdien av $d$ er

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

**Oppgave 9.** Hvilken er følgende påstander om numerisk integrasjon er sann?

☐ Feilene i Simpons regel og trapesmetoden er begge begrenset av uttrykk som involverer den andrederiverte.

☐ Simpsons metode gir en god tilnærming for alle integrerbare funksjoner.

☐ Trapesmetoden gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.

☐ Trapesmetoden gir en bedre tilnærming enn midtpunktmetoden.

☒ Simpsons regel gir riktig verdi for ethvert andregradspolynom.

**Oppgave 10.** Differensialligningen $x''' - t^2x' + 5t = 0$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

☒ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = t^2x_1 - 5t$

☐ $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_2' = t^2x_1 - 5t$

☐ $x_1' = x_3, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = t^2x_2 - 5t$

*(Fortsettes på side 4.)*

## Del 2

*Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.*

**Oppgave 1.** Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{3}n^3 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2$$

for alle $n \geq 1$.
**Svar:** La $P_n$ betegne induksjonshypotesen $\frac{1}{3}n^3 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2$. $P_1$ er opplagt sann. Anta nå at vi har vist at $P_k$ er sann for $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = n$. Vi kan skrive

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &\geq \frac{1}{3}n^3 + n^2 + 2n + 1 \\ &\geq \frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(n+1)^3.\end{aligned}$$

Dermed er $P_{n+1}$ også sann.

**Oppgave 2.** I denne oppgaven skal du bruke at Taylorpolynomet av grad $n$ til funksjonen $f(x) = e^x$ om $a = 0$ kan skrives $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$.
**Svar:** Følgende kode kan brukes, som løser begge deloppgavene

```
from math import factorial
import sys

def T(x, n):
    r = 1
    s = 0
    for k in range(n+1):
        s += r
        r = r*x/(k + 1)
    return s

if __name__ == '__main__':
    try:
        x = float(sys.argv[1])
        eps = float(sys.argv[2])
        if x > 0:
            print 'x is greater than 0!'
        else:
            n = 0
            while abs(x)**(n+1)/factorial(n + 1) >= eps:
                n += 1
            print T(x, n)
    except IndexError:
        print 'Not enough command line arguments!'
    except ValueError:
        print 'Values could not be interpreted as floats!'
```

*(Fortsettes på side 5.)*

**a)** La $r_k = x^k/k!$ være det $k$'te leddet i $T_n$. Forklar at

$$r_{k+1} = xr_k/(k+1).$$

Skriv en funksjon `T(x, n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n(x)$, og som bruker denne sammenhengen. Ikke bruk funksjonen `math.factorial(k))` her for å regne ut $k!$. Hva er fordelen med å bruke sammenhengen $r_{k+1} = xr_k/(k+1)$ i stedet for å regne ut $k!$ for hvert eneste ledd i Taylorpolynomet?

**Svar:** Vi har at $r_{k+1} = x^{k+1}/(k+1)! = x^k/n! \cdot x/(k+1) = xr_k/(k+1)$, som forklarer sammenhengen mellom $r_k$ og $r_{k+1}$.

**b)** Man kan vise at, for $x < 0$, så oppfyller restleddet her at

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1}/(n+1)!$$

Skriv et program som leser to verdier fra kommandolinjen, lagrer disse som variable `x` og `eps`, sjekker at $x < 0$, finner en $n$ slik at $|R_n(x)| \leq$`eps` (bruk gjerne `math.factorial(k))` her), og skriver ut $T_n(x)$ på skjermen. Programmet ditt skal skrive en feilmelding hvis det ikke oppgis nok kommandolinjeargumenter, hvis de ikke kan tolkes som tall, eller hvis $x > 0$.

**Oppgave 3.** Vi har gitt tre funksjonsverdier $f(a-h)$, $f(a)$ og $f(a+h)$ fra en funksjon $f(x)$ i punktene $a-h$, $a$ og $a+h$ og ønsker ut fra dette å regne ut en tilnærming til $f''(a)$. Dette gjør vi ved å finne det kvadratiske polynomet $p_2(x)$ som interpolerer $f$ i de tre punktene, og så bruke $p_2''(a)$ som vår tilnærming til $f''(a)$. Vis at denne tilnærmingen kan skrives som $(f(a+h) - 2f(a) + f(a-h))/h^2$.

**Svar:** Vi skriver opp Newton-formen til det interpolerende polynomet, $p_3(x) = c_0 + c_1(x-(a-h)) + c_2(x-(a-h))(x-a)$, der vi bruker $a-h, a, a+h$ som interpolasjonspunkter. Setter vi inn $x = a-h$ får vi først at $c_0 = f(a-h)$. Setter vi inn $x = a$ får vi så at $f(a) = f(a-h) + c_1 h$, slik at $c_1 = (f(a) - f(a-h))/h$. Vi setter så inn $x = a+h$ og får

$$\begin{aligned} f(a+h) &= c_0 + 2c_1 h + 2c_2 h^2 \\ &= f(a-h) + 2(f(a) - f(a-h)) + 2c_2 h^2 \\ &= -f(a-h) + 2f(a) + 2c_2 h^2, \end{aligned}$$

slik at $c_2 = (f(a-h) - 2f(a) + f(a+h))/(2h^2)$. Det er videre klart at $p_3''(a) = 2c_2$, slik at ilnærmingen kan skrives som $(f(a-h) - 2f(a) + f(a+h))/h^2$.

**Oppgave 4.** Vi har gitt differensialligningen

$$x' = x^2/(1+t), \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

**a)** Finn en formel for løsningen og skisser denne i et plott på intervallet $[0, 1]$.

**Svar:** Likningen er separabel siden den kan skrives som $x'/x^2 = 1/1+t$. Integrerer vi begge sider får vi at $-1/x = \ln|1+t| + C$. Setter vi inn initialbetingelsen får vi at $-1 = C$, slik at $-1/x = \ln|1+t| - 1$. Dermed blir løsningen $x(t) = 1/(1 - \ln(t+1))$. I den siste overgangen fjernet vi absluttverditegn, siden $t+1$ er positiv for $t \in [0, 1]$.

*(Fortsettes på side 6.)*

**b)** Finn en tilnærming til løsningen i $t = 0.25$ ved å ta ett steg med Eulers metode. Hva er avviket fra løsningen du fant i a)?
**Svar:** Ett steg med Eulers metode gir at $x_1 = x_0 + hx_0^2/(1+t_0) = 1+0.25 = 1.25$. Løsningen i a) gir verdien $x(0.25) = 1/(1 - \ln(1.25)) \approx 1.2872$, slik at avviket er 0.0372.

**c)** Finn en tilnærming til løsningen i $t = 0.25$ ved å ta ett steg med Eulers midtpunktsmetode. Hva er avviket fra løsningen du fant i a)? Hvilken av Eulers metode og Eulers midtpunktsmetode gir minst avvik fra den eksakte løsningen her?
**Svar:** Vi får først at $x_{1/2} = x_0 + hx_0^2/(1 + t_0)/2 = 1.125$. Deretter får vi at $x_1 = x_0 + h(x_{1/2})^2/(1 + t_{1/2}) = 1 + 0.25 \cdot 1.125^2/1.125 = 1 + 0.25 \cdot 1.125 \approx 1.2812$. Avviket blir nå 0.0060, lik at Eulers midtpunktsmetode gir klart minst avvik.

*Lykke til!*