UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger. Prøveeksamen 2
Eksamensdag:	Onsdag 14. November 2014.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Husk å fylle inn kandidatnummer under.

Kandidatnr: ________

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige!
Husk å levere arkene med flervalgssvarene!

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylorpolynomet om $a = 1$ av grad 2 for funksjonen $f(x) = x^3$?

- [ ] x^3
- [ ] x^2
- [ ] 0
- [ ] $1 + 3x + 3x^2$
- [x] $1 - 3x + 3x^2$

Oppgave 2. Taylorpolynomet av grad 3 om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = \sin x + \cos x$ er

- [ ] $1 + x + x^2/2 + x^3/6$
- [x] $1 + x - x^2/2 - x^3/6$
- [ ] $1 - x + x^2/2 - x^3/6$
- [ ] $-1 - x + x^2 + x^3/6$
- [ ] $-1 + x - x^2/2 + x^3/6$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Du skal tilnærme funksjonen $f(x) = e^x$ med et Taylorpolynom av grad n på intervallet $[0, 1]$, utviklet om $a = 0$. Det viser seg at feilen er begrenset av

$$\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Hva er den minste graden n som gjør at feilen blir mindre enn 0.01 for alle x i intervallet $[0, 1]$?

- [ ] $n = 1$
- [ ] $n = 3$
- [ ] $n = 4$
- [x] $n = 5$
- [ ] $n = 7$

Oppgave 4. Løsningen til differensialligningen $y'' + 4y' - 5y = 0$ med initialverdier $y(0) = 1$ og $y'(0) = 1$ er

- [ ] $y(x) = e^{-x}$
- [ ] $y(x) = 3e^{3x} - 3e^x$
- [ ] $y(x) = e^x + xe^x$
- [x] $y(x) = e^x$
- [ ] $y(x) = e^{-2x}$

Oppgave 5. Løsningen til differensialligningen $y' + y^2x^3 = 0$ med initialverdi $y(0) = 1$ er

- [ ] $y(x) = 1/(1 + x^4)$
- [ ] $y(x) = 3/(3 + x^2)$
- [ ] $y(x) = 2/(2 + x^2)$
- [x] $y(x) = 4/(4 + x^4)$
- [ ] $y(x) = 4/(4 + x^3)$

Oppgave 6. Vi interpolerer funksjonen $f(x) = x^4$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, og $x_3 = 3$, med et tredjegradspolynom $p_3(x)$. Vi har da at

- [x] $p_3(x) = x + 7x(x-1) + 6x(x-1)(x-2)$
- [ ] $p_3(x) = x + 16x(x-1) + 34x(x-1)(x-2)$
- [ ] $p_3(x) = x^3$
- [ ] $p_3(x) = 2x + 6x(x-1) + 8x(x-1)(x-2)$
- [ ] $p_3(x) = x + 5x(x-1) + 4x(x-1)(x-2)$

Oppgave 7. Du skal bruke halveringsmetoden til å finne nullpunktet til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$ og begynner med intervallet $[0, 2]$. Hva er intervallet etter to steg?

- [ ] $[0, 0.5]$
- [ ] $[0.5, 1]$
- [x] $[1, 1.5]$
- [ ] $[1.5, 2]$
- [ ] $[0, 1]$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi skal se på tilnærmingen til den deriverte gitt ved den symmetriske Newton-kvotienten

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

For $f(x) = x^3$ blir feilen i denne tilnærmingen nøyaktig lik (bortsett fra avrundingsfeil)

- [ ] $h^2/2$
- [ ] 0
- [x] h^2
- [ ] h
- [ ] $h/2$

Oppgave 9. Vi bruker trapesmetoden for å finne en tilnærming T til integralet $\int_0^2 e^{-x^2} dx$. Hvis vi deler opp intervallet i to like delintervaller får vi tilnærmingen

- [ ] $T \approx 0.923$
- [x] 0.877
- [ ] 0.345
- [ ] 0.705
- [ ] 0.801

Oppgave 10. Differensialligningene

$$\begin{aligned} x'' - 2tx' + \sqrt{t}x + y &= 0 \\ y' + x &= t^3 \end{aligned}$$

skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

- [ ] $x_2' = x_1, \quad y_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_1' = x_1 + t^3$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = 2tx_2 - \sqrt{x}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- [ ] $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2tx_2 + \sqrt{t}x_1 + y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- [ ] $x_1' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad x_2' = x_1 \quad y_1' = -x_1 + t^3$
- [x] $x_1' = x_2, \quad x_2' = 2tx_2 - \sqrt{t}x_1 - y_1, \quad y_1' = -x_1 + t^3$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. Vis ved induksjon at for alle naturlige tall n er tallet $8^n - 1$ delelig med 7.
Svar: La P_n være induksjonshypotesen at $8^n - 1$ er delelig med 7. P_1 er opplagt sann. Anta nå at vi har vist at P_k er sann for $k = 1$, $k = 2, \ldots$, $k = n$. Vi kan skrive

$$8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 8(8^n - 1 + 1) - 1 = 8(8^n - 1) + 8 - 1 = 8(8^n - 1) + 7$$

Her summerer vi to tall som er delelig med 7 ($8^n - 1$ er delelig med 7 siden vi antar at P_n er sann), slik at summen $8^{n+1} - 1$ også blir delelig med 7. Dermed er også P_{n+1} sann, og induksjonsbeviset er fullført.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi lage et program som tester Newtons metode på en funksjon f:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Svar: Følgende kode kan brukes, som løser begge deloppgavene

```python
from math import sqrt

def newton(f, df, x0, N):
    x = x0
    for k in range(N):
        x -= f(x)/df(x)
    return x

def f(x):
    return x**2 - 2.

def df(x):
    return 2*x

def test_newton(x0, rt):
    x = newton(f, df, x0, 10)
    # alternatively you can use lambda functions, which are not in the syllabus:
    # x = newton(lambda x: x**2 - 2., lambda x: 2*x, x0, 10)
    assert abs(x - rt) <= 1E-8 , 'error, last estimate is %s' % x

if __name__ == '__main__':
    test_newton(-2, sqrt(2))
```

a) Skriv en funksjon `newton(f, df, x0, N)` i Python som tar funksjonen $f(x)$, dens deriverte $f'(x)$, startpunktet x_0, og `N` som parametre, og kjører `N` iterasjoner av Newtons metode. Funksjonen skal returnere den siste verdien for x_n som ble regnet ut.

(Fortsettes på side 5.)

b) Skriv en testfunksjon som tar to parametre `x0` og `rt`. Testfunksjonen skal kjøre Newtons metode med start i `x0`, med `N`= 10 iterasjoner, og funksjonen skal være $f(x) = x^2 - 2$. Testfunksjonen skal feile hvis

```
abs(x - rt)>1E-8,
```

der `x` er estimatet som ble returnert av Newtons metode. Med andre ord, testfunksjonen sjekker om Newtons metode med start i `x0` ender opp i nærheten av `rt`. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av et `assert`-statement). Hva tror du vil skje når du kjører testfunksjonen med parametre `x0=-2` og `rt=sqrt(2)`? Når vi starter Newtons metode med $x_0 = -2$ så er det ganske klart at det er roten $-\sqrt{2}$ som vil bli funnet, og ikke $\sqrt{2}$ som vi sjekker på her. Uavhengig av om 10 iterasjoner nok til å komme nære nok til nullpunktet her, så vil med andre ord testfunksjonen feile (den gir en `AssertionError`).

Oppgave 3. Vi har gitt funksjonen $f(x) = 1/(1+x)$. Finn Taylorpolynomet $T_n(x)$ av n'te grad for f om 0. Hvor stor må du velge n for at $T_n(x)$ skal gi en tilnærming til $f(x)$ med absolutt feil mindre enn 0.001 for alle x i intervallet $[0, 0.5]$?

Svar: Det er klart at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$, slik at $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$. Derfor blir $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k$. Restleddet kan skrives som $R_n(x) = (-1)^{n+1}(1+c)^{-n-2}x^{n+1}$, for en c mellom 0 og x. Det er klart at $|R_n(x)| \leq (0.5)^{n+1}$ når x ligger i intervallet $[0, 0.5]$. Vi får derfor at vi må velge n slik at $2^{-n-1} \leq 10^{-3}$, det vil si slik at $2^{n+1} \geq 1000$. Det er klart at vi da må velge $n = 9$.

En annen måte å se dette på er å se at restleddet kan skrives som den geometriske rekken $\sum_{k=n+1}^{\infty}(-x)^k$ (akkurat som at f selv kan skrives som en geometrisk rekke). Restleddet kan dermed skrives som $(-x)^{n+1}/(1+x)$. Skal dette være mindre eller lik 0.001 i absoluttverdi for alle x i intervallet $[0, 0.5]$ så må $(0.5)^{n+1}/(1+0.5) \leq 0.001$, slik at $2000/3 \leq 2^{n+1}$. Dette gir også $n = 9$.

Oppgave 4. I denne oppgaven er det mulig å løse c) selv om du ikke har svart på b).

Vi har gitt differensialligningen

$$x' = t\sin x, \quad x(0) = 1.$$

a) Regn ut $x'(0)$, Taylorpolynomet av første grad $p_1(t)$ til løsningen i $a = 0$ og regn ut $p_1(0.1)$ som en tilnærming til $x(0.1)$.

Svar: Vi ser at $x'(0) = 0$. Taylorpolynomet av første grad til løsningen i $a = 0$ blir dermed $p_1(t) = x(0) + x'(0)t = 1$, slik at $p_1(0.1) = 1$.

b) Deriver begge sider av differensialligningen med hensyn på t, regn ut $x''(0)$ og finn det kvadratiske Taylorpolynomet p_2 til løsningen om $a = 0$. Bruk $p_2(0.1)$ som en annen tilnærming til $x(0.1)$.

Svar: Vi får at

$$x''(t) = \sin x + t\cos(x)x' = \sin x + t^2 \sin x \cos x = \sin x + \frac{t^2}{2}\sin(2x).$$

(Fortsettes på side 6.)

Vi ser at $x''(0) = \sin 1$, slik at

$$p_2(t) = x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2 = 1 + \frac{1}{2}\sin(1)t^2.$$

Vi får nå tilnærmingen $p_2(0.1) = 1 + \sin(1)/200 \approx 1.0042$.

c) Finn en øvre grense for den absolutte feilen i tilnærmingen i a) (vi ser bort fra avrundingsfeil).

Svar: Restleddet for Taylorpolynomet (for $t = 0.1$) av første grad kan skrives som $x''(c)(0.1)^2/2 = (\sin x(c) + \frac{c^2}{2}\sin(2x(c)))(0.1)^2/2$, der c er et tall mellom 0 og 0.1. Dette er mindre enn eller lik $(1 + 0.1^2/2)(0.1)^2/2 = 1.005 \cdot 0.005 = 0.005025$.

Lykke til!