UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger.
Eksamensdag:	Mandag 7. Desember 2015.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = 1/(1 + x^2)$?

✓**A:** $1 - x^2$

B: $1 + x^2$

C: $x - x^2/2$

D: $x + x^2/2$

E: $1 + x$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = 1 + x^4$?

A: $2 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$

B: $2 + 4(x - 1) - 4(x - 1)^2 - 4(x - 1)^3$

C: $2 + 5(x - 1) + 13(x - 1)^2 + 25(x - 1)^3$

D: $2 - 4x - 6x^2 - 4x^3$

✓**E:** $2 + 4(x - 1) + 6(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Hva er Taylor-polynomet av grad 2 om $a = \pi$ for funksjonen $f(x) = 1/(2 + \sin x)$?

A: $1/3 + (x - \pi)/2 + (x - \pi)^2/8$.

✓**B:** $1/2 + (x - \pi)/4 + (x - \pi)^2/8$.

C: $1/2 - (x - \pi)/4 + (x - \pi)^2/8$.

D: $1/2 + (x - \pi) + (x - \pi)^2$.

E: $1/2 + (x - \pi)^2/8$.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^x(\cos(2x) + \sin(2x))$

B: $y(x) = e^{2x} \cos x$

C: $y(x) = e^x \sin(2x)$

✓**D:** $y(x) = e^x \cos(2x)$

E: $y(x) = e^x \cos x$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $x^2y' - y = 0$ er

✓**A:** $y(x) = e^{-1/x}$

B: $y(x) = e^{1/x}$

C: $y(x) = xe^{-1/x}$

D: $y(x) = e^{-2/x}$

E: $y(x) = e^{2/x}$

Oppgave 6. Newton-formen til andregradspolynomet som interpolerer funksjonen $f(x) = 1/(1 + x)$ i punktene $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ er

A: $p_2(x) = 1 + x(x - 1)/6$

B: $p_2(x) = 1 - x/2 - x(x - 1)/6$

C: $p_2(x) = 1 + x/2 + x(x - 1)/6$

D: $p_2(x) = 1 - (x - 1)/2 + (x - 1)x/6$

✓**E:** $p_2(x) = 1 - x/2 + x(x - 1)/6$

Oppgave 7. Vi bruker halveringsmetoden til å bestemme ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = (x - 1)(x - 1/2)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ på intervallet $[0, 5]$. Midtpunktene i de beregnede intervallene vil da konvergere mot

A: 2.25

B: 3

C: 1.5

D: 2.5

✓**E:** 2

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. Vi minner om at Newton-kvotienten til f i punktet a er definert som

$$(f(a+h)-f(a))/h.$$

Tilnærmingen til den deriverte av $f(x)=x^2$ i $a=1$ med denne metoden er da gitt ved

✓**A:** $2+h$

B: 2

C: $2-h$

D: h

E: $2+h^2$

Oppgave 9.
Vi minner om at midtpunktmetoden for integralet $I=\int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervaller er gitt ved

$$I \approx h\sum_{i=1}^{n} f\big(a+(i-1/2)h\big), \quad h=(b-a)/n.$$

(det var her en trykkfeil i oppgaven: en ekstra h i formelen over hadde sneket seg inn)

Hvis vi bruker midtpunktmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 x^3 dx$$

får vi tilnærmingen

A: $33/8$

✓**B:** $31/8$

C: $31/4$

D: 4

E: $9/2$

Oppgave 10. Differensialligningen $x'''+x^2=t$, med initialbetingelser $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_1'=x_2,\quad x_2'=x_3,\quad x_3'=t-x_2^2,\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,\ x_3(0)=0$

B: $x_1'=x_2,\quad x_2'=x_3,\quad x_3'=t-x_1^2,\ x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_3(0)=1$

✓**C:** $x_1'=x_2,\quad x_2'=x_3,\quad x_3'=t-x_1^2,\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,\ x_3(0)=0$

D: $x_1'=x_2,\quad x_2'=t-x_1^2,\quad x_1(0)=0,\ x_2(0)=1$

E: $x_1'=x_2,\quad x_2'=t-x_1^2,\quad x_3'=x_2,\ x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,\ x_3(0)=0$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = 1/(x-1)$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!(x-1)^{-(k+1)}$ for alle $k \geq 0$.

Svar: La P_n være induksjonspåstanden. Vi ser at P_n opplagt er sann for $n = 0$.

Anta så at P_k er sann for $k = 1, 2, \ldots, n$, vi må vise at da er P_{n+1} også sann. Vi har

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \big(f^{(n)}(x)\big)' = \big((-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)}\big)' \\ &= (-1)^n n!(-(n+1))(x-1)^{-(n+2)} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!(x-1)^{-((n+1)+1)}. \end{aligned}$$

Dermed er P_{n+1} også sann og vi har fullført induksjonsbeviset.

b) Finn Taylor-polynomet $T_3(x)$ av grad 3 til f om $a = 3$ og restleddet $R_3(x)$. Finn en øvre grense $z \geq 3$ slik at for alle x i intervallet $[3, z]$ er feilen i $T_3(x)$ mindre enn 0.01.

Svar: Vi bruker formelen fra (a) og finner at $f(3) = 1/2$, $f'(3) = -2^{-2} = -1/4$, $f''(3) = 1/4$, $f'''(3) = -3/8$. Dermed blir

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(3) + f'(3)(x-3) + f''(3)(x-3)^2/2 + f'''(3)(x-3)^3/6 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-3) + \frac{1}{8}(x-3)^2 - \frac{1}{16}(x-3)^3. \end{aligned}$$

Vi har også at

$$R_3(x) = f^{(4)}(c)(x-3)^4/4! = (-1)^4 4!(c-1)^{-5}(x-3)^4/4! = (c-1)^{-5}(x-3)^4$$

for en c i intervallet $(3, x)$. Spesielt er $c \geq 3$, slik at $c - 1 \geq 2$. Siden funksjonen $(c-1)^{-5}$ avtar når c vokser ser vi at

$$\big|R_3(x)\big| = \big|(c-1)^{-5}(x-3)^4\big| \leq 2^{-5}(x-3)^4.$$

Dermed vil vi ha at $|R_3(x)| \leq 0.01$ hvis vi krever at $(x-3)^4/32 \leq 0.01$. Dette vil si at $(x-3)^4 \leq 0.32$, eller $x < 0.32^{1/4} + 3 \approx 3.7521$.

Oppgave 2. Vi har gitt differensialligningen

$$x' + (1-t^2)x = 1 - t^2, \quad x(0) = 0.$$

a) Finn en formel for løsningen av differensialligningen.

Svar: Ligningen er separabel siden vi kan omforme den til $x' = (1-x)(1-t^2)$ eller

$$x'/(1-x) = 1 - t^2.$$

Integrerer vi begge sider får vi at $-\ln|1-x| = t - t^3/3 + C$, slik at $1 - x = Ke^{-t+t^3/3}$. Her har vi satt $K = \pm e^{-C}$, der fortegnet avhenger av om $1 - x$ er positiv eller negativ). Dermed finner vi

$$x(t) = 1 - Ke^{-t+t^3/3}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Bruker vi initialbetingelsen får vi ligningent $0 = 1 - K$ slik at $K = 1$ og den endelige løsningen blir

$$x(t) = 1 - e^{-t+t^3/3}.$$

b) Finn to tilnærminger til løsningen i $t = 0.5$: En ved å ta ett steg med Eulers metode, og en annen ved å ta ett steg med Eulers midtpunktmetode. Hva er avvikene fra løsningen du fant i (a)?
Er dette rimelige verdier, ut fra hva du vet om nøyaktigheten for disse metodene?

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

(det var her en trykkfeil i eksamensoppgaven, formelen over er den riktige) der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Svar: Vi skriver først ligningen om til en mer standard form $x'(t) = (1 - t^2)(1 - x)$. Vi har da $f(t, x) = (1 - t^2)(1 - x)$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ og $h = 0.5$ slik at

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = 0 + 0.5(1 - 0^2)(1 - 0) = 0.5.$$

Løsningen fra a) gir at $x(0.5) = 1 - e^{-0.5+0.5^3/3} \approx 0.3677$, slik at avviket er 0.1323.
Med Eulers midtpunktsmetode får vi først at

$$x_{1/2} = x_0 + 0.25(1 - t_0^2)(1 - x_0) = 0 + 0.25 = 0.25.$$

Deretter får vi at

$$x_1 = x_0 + 0.5(1 - t_{1/2}^2)(1 - x_{1/2}) = 0 + 0.5 \cdot (1 - 1/16)(1 - 0.25) \approx 0.3516,$$

slik at avviket blir 0.0161.
Det er tydelig at Eulers midtpunktsmetode gir minst avvik, noe som er i tråd med det vi har lært om nøyaktigheten for disse to metodene (feilen i Eulers metode er proporsjonal med h, mens feilen i Eulers midtpunktsmetode er proporsjonal med h^2).
Svar: Følgende kode kan brukes, som løser både deloppgave c) og d)

```
from math import *

def euler(f, a, b, x0, n):
    h = float(b - a)/n
    t = a
    x = x0
    for k in range(n):
        x += h*f(t, x)
        t += h
    return x
```

(Fortsettes på side 6.)

```
def f(t,x):
    return (1-t**2)*(1-x)

def test_euler():
    exact = 1 - exp(-0.5 + 0.5**3/3.)
    computed = euler(f, 0, 0.5, 0, 1000)

    assert abs(computed - exact) <= 0.001 , 'error between exact and \
    computed value is %s' % (computed-exact)

if __name__ == '__main__':
    test_euler()
```

c) Skriv en funksjon `euler(f, a, b, x0, n)` som finner en tilnærming til $x(b)$ ved å ta n steg med Eulers metode for differensialligningen $x'(t) = f(t, x)$. Intialbetingelsen er $x(a)$ =`x0`. Funksjonen `euler` skal altså anta at `f` er en funksjon som tar to parametre, svarerende til høyresiden i differensiallikningen.

d) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av Eulers metode er riktig. Du kan for eksempel kalle `euler` med en veldig stor n (for eksempel 1000), bruke $a = 0$, $b = 0.5$ som i (b), og la differensiallikningen være $x' + (1 - t^2)x = 1 - t^2$ med $x(0) = x_0 = 0$, med løsningen du fant i (a). Vi antar at implementasjonen er riktig hvis avviket mellom den eksakte løsningen og resultatet fra Eulers metode er mindre enn 0.001. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 3.

I denne oppgaven skal vi beregne tilnærminger til integralet

$$I = \int_0^1 \operatorname{sinc} x \, dx \tag{1}$$

der funksjonen $\operatorname{sinc} x$ er definert ved

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} 1, & \text{for } x = 0; \\ \sin x / x, & \text{for } x \neq 0. \end{cases}$$

Beregn to tilnærminger til integralet (1): den første ved hjelp av midtpunktmetoden og den andre ved å erstatte $\sin x$ i definisjonen av $\operatorname{sinc} x$, med tilnærmingen gitt ved Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 0$,

$$\sin x \approx x - x^3/6.$$

Sammenlign tilnærmingene med den eksakte verdien $I = 0.946083$ (med 6 desimaler). Hvilken av de to tilnærmingene er mest nøyaktig? Forklar kort hvorfor du mener dette er rimelig eller urimelig.

Vi minner om at midtpunktmetoden for å beregne en tilnærming til integralet av funksjonen $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er gitt ved

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx (b - a) f\big((a + b)/2\big).$$

(Fortsettes på side 7.)

Svar: Tilnærmingen vi får ved å bruke midtpunktmetoden gir $\operatorname{sinc}(0.5) = \sin(0.5)/0.5 \approx 0.958851$, som gir en feil på 0.012768. Tilnærmingen vi får ved å bruke at $\sin x \approx x - x^3/6$ gir

$$\begin{aligned} I &\approx \int_0^1 \frac{x - x^3/6}{x} dx = \int_0^1 (1 - x^2/6) dx = [x - x^3/18]_0^1 \\ &= 1 - 1/18 = 17/18 \approx 0.944444, \end{aligned}$$

som gir en feil på 0.001639. Den siste tilnærmingen er derfor mest nøyaktig.

Når det gjelder om det er rimelig eller urimelig at det eneste estimatet er bedre enn det andre, så kan flere argumenter godtas. Det gis feks. poeng for å nevne at jo flere ledd vi tar med i Taylortilnærmingen, jo bedre tilnærminger får vi for integralet.

Det gis også poeng for konkrete estimater for feilen. For midtpunktmetoden vet vi at feilen er begrenset av $M(b-a)^3/24$, der $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. I stedet for å regne ut $f''(x)$ (som er litt tungvint), la oss heller se på Taylortilnærmingen $\sin x \approx x - x^3/6$. Vi ser fra denne at $\operatorname{sinc} x = \sin x / x \approx 1 - x^2/6$ (der feilen er proporsjonal med x^3). Deriverer vi denne to ganger ser vi at $f''(x) \approx -1/3$ (der feilen er proporsjonal med x). Vi ser at $f''(x) \to -1/3$ når $x \to 0^+$, slik at $M \geq 1/3$, og vi kan altså ikke få bedre estimat med midtpunktmetoden enn $1/(24 \cdot 3) = 1/72$.

Restleddet vi får for Taylortilnærmingen av $\sin x$ er på formen $\frac{(\sin x)^{(iv)}(c)}{4!} x^4 \leq x^4/24$. Feilen i integralet er dermed begrenset av $\int_0^1 x^3/24 = 1/96 \approx 0.01$ (vi ser at vår tilnærming er klart innenfor dette). Vi klarer altså få en litt bedre garanti for feilen her enn med midtpunktmetoden, som er i tråd med det vi regnet ut.

Lykke til!