UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 1100L — Programmering, modellering, og beregninger.
Eksamensdag:	Fredag 2. Desember 2016.
Tid for eksamen:	9:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 1.5 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 5 poeng. Den totale poengsummen er altså maksimalt 50 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet får 0 poeng selv om de er riktige! *Husk å levere arkene med flervalgssvarene!*

Del 1: Flervalgsoppgaver

Oppgave 1. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = x^2$?

✓**A:** $1 + 2(x - 1)$

B: $1 + (x - 1)$

C: 1

D: $x - 1$

E: $1 + x^2$

Oppgave 2. Hva er Taylor-polynomet av grad 3 om $a = 1$ for funksjonen $f(x) = \ln x$?

A: $1 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

B: $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

C: $(x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

✓**D:** $(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3$

E: $(x - 1) - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. Hva er Taylor-polynomet av grad 1 om $a = 0$ for funksjonen $f(x) = \sin(\sin x)$?

✓**A:** x.

B: $\cos(1)x$.

C: $\sin(1)x$.

D: 0.

E: $\sin(1)\cos(1)x$.

Oppgave 4. Løsningen av differensialligningen

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

er gitt ved

A: $y(x) = e^{2x}$

✓**B:** $y(x) = e^{2x} - xe^{2x}$

C: $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$

D: $y(x) = xe^{2x}$

E: $y(x) = 2e^{2x} - 2xe^{2x}$

Oppgave 5. En løsning av differensialligningen $x^2 y' y^2 = 2x$ er

✓**A:** $y(x) = (6 \ln x)^{1/3}$

B: $y(x) = \ln x$

C: $y(x) = (6 \ln x)^{1/2}$

D: $y(x) = 3x^{1/3}$

E: $y(x) = (\ln x)^{1/3}$

Oppgave 6. Et tredjegradspolynom som interpolerer datasettet

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

er

A: $p_3(x) = 1 - x - \frac{2}{3}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

B: $p_3(x) = 1 + x + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

✓**C:** $p_3(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

D: $p_3(x) = 1 + 2x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3)$

E: $p_3(x) = 1 - x^2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. Vi minner om at sekantmetoden finner tilnærminger til nullpunkter til f ved hjelp av formelen

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}).$$

Vi bruker sekantmetoden med startverdier $x_1 = 1$ og $x_2 = 2$ til å finne ett av nullpunktene til funksjonen $f(x) = x^2 - 2$. I første iterasjon får vi da at x_3 blir

A: $\sqrt{2}$

B: 1.9

C: 1.5

✓**D:** 4/3

E: 5/4

Oppgave 8. Vi bruker

$$f''(a) \approx \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

for å regne ut tilnærminger til den andrederiverte. Tilnærmingen til den andrederiverte av $f(x) = x^3$ i $a = 1$ er da gitt ved

✓**A:** 6

B: $6 + h$

C: $6 - h$

D: $6 + h^2$

E: $6 - h^2$

Oppgave 9.
Vi minner om at trapesmetoden for integralet $I = \int_a^b f(x)\,dx$ med n delintervaller er gitt ved

$$I \approx h\big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\big), \quad h = (b-a)/n.$$

Hvis vi bruker trapesmetoden med 4 intervaller til å regne ut

$$\int_0^2 x^2 dx$$

får vi tilnærmingen

A: 33/8

B: 3

C: 8/3

D: 7/3

✓**E:** 11/2

Her var den oppgitte formelen for I i trapesmetoden feil: Vi skulle også ha delt med to (i formelsamlingen er formelen riktig), og da ville svaret blitt 11/4. Med andre ord, med den oppgitte formelen får du et av svaralternativene, men både formelen og svaralternativet burde vært delt på to.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. Differensialligningen $x'' + \sin(x^2 + x') = t$, med initialbetingelser $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$ skal skrives som et system av førsteordens differensialligninger. Hvilket system er riktig?

A: $x_2' = x_1, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

B: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

✓**C:** $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_1^2 + x_2) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

D: $x_1' = x_2, \quad x_2' = -\sin(x_2^2 + x_1) + t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

E: $x_1' = x_2, \quad x_2' = \sin(x_1^2 + x_2) - t$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

(Fortsettes på side 5.)

Del 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes! Og ikke glem å besvare alle delspørsmålene i hver deloppgave.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi studere funksjonen $f(x) = xe^x$.

a) Vis ved induksjon at $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$ for alle $k \geq 0$.

Svar: La P_k representere påstanden at $f^{(k)}(x) = (x+k)e^x$. P_0 er opplagt sann. Anta at vi har vist P_k for $k = 1 \ldots n$. Vi har da at

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = ((x+n)e^x)' = e^x + (x+n)e^x = (x+(n+1))e^x,$$

som viser at P_{n+1} også er sann.

b) Finn Taylor-polynomet $T_n(x)$ av grad n til f om $a = 0$ og restleddet $R_n(x)$. Finn en N slik at for alle $n \geq N$, og for alle x i intervallet $[0,1]$, så vil feilen i $T_n(x)$ bli mindre enn 0.001.

Svar: Fra a) følger at $f^{(k)}(0) = k$, slik at Taylorrekken blir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} x^k == \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} x^k.$$

Vi har også at

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!} x^{n+1},$$

der c er et tall mellom 0 og x. Siden $(c+n+1)e^c$ er voksende i c, så har vi for $x \in [0,1]$ at

$$|R_n(x)| \leq \frac{(n+2)e}{(n+1)!}.$$

Skal dette være mindre enn 0.001 må vi ha at $\frac{(n+2)e}{(n+1)!} < 0.001$, eller $\frac{(n+1)!}{n+2} > 1000e$. Ved å regne ut dette for forskjellige n ser vi at $n = 7$ er minste slike verdi.

Svar: Følgende kode kan brukes, som løser både deloppgave c) og d)

```
from math import *

def T(x, n):
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s += x**k/factorial(k-1)
    return s



def test_taylor():
    exact = exp(1)
    computed = T(1.,7)

    assert abs(computed - exact) <= 0.001 , 'error between exact and \
    computed value is %s' % (computed-exact)
```

(Fortsettes på side 6.)

```
if __name__ == '__main__':
    test_taylor()
```

c) Skriv en funksjon `T(x, n)` i Python som regner ut og returnerer $T_n(x)$ definert i b). Du kan bruke funksjonen `math.factorial(k)` til å regne ut $k!$.

d) Skriv en testfunksjon som sjekker om din implementasjon av T_n er riktig. Du kan for eksempel kalle `T` med en n større enn N som du fant i b), og sjekke at avviket fra den eksakte verdien $f(1) = e$ er mindre enn 0.001. Testfunksjonen skal følge standard konvensjon for slike funksjoner (spesielt skal den ha navn på formen `test_*()`, og gjøre testen ved hjelp av en `assert`).

Oppgave 2. Vi har gitt differensialligningen

$$x' = \sin(t + x), \quad x(0) = \pi/2.$$

a) Finn to tilnærmede løsninger til ligningen i $t = 0.1$ ved å ta et steg med Eulers metode og et steg med Eulers midtpunktmetode.
Svar: Med Eulers metode får vi at

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) = \pi/2 + 0.1 \sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.1 \approx 1.6708.$$

Med Euler midtpunktmetode får vi

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= x_0 + hf(t_0, x_0)/2 = \pi/2 + 0.05 \sin(\pi/2) = \pi/2 + 0.05 \\
x_1 &= x_0 + hf(t_{1/2}, x_{1/2}) = \pi/2 + 0.1 \sin(0.05 + \pi/2 + 0.05) \\
&= \pi/2 + 0.1 \sin(0.1 + \pi/2) \approx 1.6703.
\end{aligned}$$

I nynorskversjonen og engelskversjonen av settet ble man bedt om å finne tilnærmede løsninger til ligningen i $t = h$, i stedet for $t = 0.1$. Eulers metode gir da $x_1 = \pi/2 + h$, mens Eulers midtpunktsmetode gir $x_1 = \pi/2 + h\sin(h + \pi/2)$. Disse svarene godtas derfor også, siden det var forskjell for de forskjellige målformene.

b) Finn et uttrykk for $x''(t)$ ved å derivere begge sider av differensialligningen og regn fra dette ut $x''(0)$. Bruk dette til å finne en tilnærming til løsningen i $t = 0.1$ ved hjelp av det kvadratiske Taylor-polynomet. Finn også en verdi for h som garanterer at feilen i Eulers metode er mindre enn 0.0001.
Svar: Vi har at

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \cos(t + x)(1 + x'(t)) = \cos(t + x)(1 + \sin(t + x)) \\
&= \cos(t + x) + \cos(t + x) \sin(t + x) \\
&= \cos(t + x) + \frac{1}{2} \sin(2(t + x)),
\end{aligned}$$

slik at $x''(0) = \cos(\pi/2) + \frac{1}{2}\sin(\pi) = 0$. Siden $x'(0) = \sin(\pi_2 + 0) = 1$ blir tilnærmingen til løsningen ved hjelp av det kvadratiske Taylorpolynomet dermed

$$x(t) \approx x(0) + x'(0)t + x''(0)t^2/2 = \pi/2 + t,$$

(Fortsettes på side 7.)

slik at tilnærmingen blir $\pi/2+0.1$ for $t = 0.1$, som er samme tilnærmingen vi fikk som i Eulers metode. Hadde vi brukt førsteordens Taylor med restledd ville vi fått (for en c mellom 0 og t)

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + x''(c)t^2/2.$$

Restleddet/feilen er her

$$R_2(t) = x''(c)t^2/2 = \left(\cos(c + x(c)) + \frac{1}{2}\sin(2(c + x(c)))\right)t^2/2,$$

der c er et tall mellom 0 og t. Siden sin og cos er mindre enn eller lik 1 i absoluttverdi, så er $|R_2(t)| \leq \left(1 + \frac{1}{2}\right)t^2/2 = \frac{3}{4}t^2$. For h krever vi derfor at $\frac{3}{4}h^2 < 10^{-4}$, som gir at $h < \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-2} \approx 0.0115$.

Vi minner om at Eulers midtpunktmetode for ligningen $x' = f(t, x)$ med $x(t_0) = x_0$ og steglengde h er gitt ved

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1/2}, x_{k+1/2})$$

der

$$x_{k+1/2} = x_k + hf(t_k, x_k)/2, \qquad t_{k+1/2} = t_k + h/2.$$

Oppgave 3. Vi har datasettet

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	2

Finn det kvadratiske interpolasjonspolynomet p som interpolerer disse verdiene og regn ut en tilnærming til den deriverte til f i $x = 1$ ved hjelp av tilnærmingen $f'(1) \approx p'(1)$.

Svar: Newtonformen til det interpolerende polynomet er $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x(x-1)$. Setter vi inn funkjonsverdiene får vi ligningene

$$\begin{aligned}1 &= c_0\\0 &= c_0 + c_1\\2 &= c_0 + 3c_1 + 6c_2.\end{aligned}$$

$c_0 = 1$ følger fra den første likningen. Fra den andre likningen får vi at $c_1 = -1$, og fra den tredje likningen følger at $x_2 = (2 - 1 + 3)/6 = 2/3$, slik at

$$p(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1).$$

Vi får nå at $p'(x) = -1 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$, slik at tilnærmingen vår blir $p'(1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$.

Lykke til!