

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra

Eksamensdag: Mandag 13. mai 2013

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 13 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye. Avsluttende eksamen vil inneholde 12 deloppgaver, og vil ha omtrent samme vanskelighetsgrad.

### Oppgave 1 Fourierrekker

Regn ut den komplekse Fourierrekka til funksjonen  $f(t) = \cos^3(2\pi t/T)$  (der  $T$  er perioden til  $f$ ).

### Oppgave 2 Lyd og DFT

#### 2a

Anta at `FFTImpl` of `IFFTImpl` er implementasjoner av DFT og IDFT, respektive. Forklar hva koden nedenfor gjør, linje for linje:

```
[S,fs]=wavread('castanets.wav');
S=S(1:2^(17),1);
y=FFTImpl(S);
y((2^17/4+1):(3*2^17/4))=zeros(2^16,1);
newS=IFFTImpl(y);
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,fs);
playblocking(playerobj)
```

Kommenter spesielt hvorfor vi gjør det som står på tredje nederste linje. Hva slags endringer i lyden forventer du å høre?

#### 2b

I koden over viser det seg at samplingsfrekvensen er  $f_s = 44100\text{Hz}$ . Hvilke frekvenser i lydfila blir dermed berørt av det du gjør i linje 4 i koden?

(Fortsettes på side 2.)

### Oppgave 3 Filtre

Et filter  $S$  er definert ved likningen

$$z_n = \frac{1}{3}(x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3}).$$

#### 3a

Regn ut og plott (magnituden til den kontinuerlige) frekvensresponsen til filteret, dvs  $|\lambda_S(\omega)|$ . Er filteret et lavpassfilter eller et høypassfilter?

#### 3b

Finn et uttrykk for vektor-frekvensresponsen  $\lambda_{S,2}$ . Hva blir  $S\mathbf{x}$  når  $\mathbf{x}$  er vektoren av lengde  $N$  med komponenter  $e^{2\pi i 2k/N}$ ?

### Oppgave 4 Tensorprodukter

La  $S = \frac{1}{4}\{1, 2, 1\}$  være et filter.

#### 4a

Hva blir effekten av at du anvender tensorproduktene  $S \otimes I$ ,  $I \otimes S$ , og  $S \otimes S$  på et bilde representert ved en matrise  $X$ ?

#### 4b

Regn ut  $(S \otimes S)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$ , der  $\mathbf{x} = (4, 8, 8, 4)$ ,  $\mathbf{y} = (8, 4, 8, 4)$  (d.v.s både  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  er søylevektorer).

### Oppgave 5 Bilder og wavelets

Anta at vi har et bilde gitt ved  $N \times N$ -matrisen  $X$ . Vi skal se på følgende Matlab-kode:

```

for s=1:N
    c=(X(1:2:(N-1),s)+X(2:2:N,s))/sqrt(2);
    w=(X(1:2:(N-1),s)-X(2:2:N,s))/sqrt(2);
    X(1:N,s)=[c; w];
end
X=X';

for s=1:N
    c=(X(1:2:(N-1),s)+X(2:2:N,s))/sqrt(2);
    w=(X(1:2:(N-1),s)-X(2:2:N,s))/sqrt(2);
    X(1:N,s)=[c; w];
end
X=X';

```

(Fortsettes på side 3.)

**5a**

Kommenter hva koden gjør, og forklar hva du ser hvis du viser frem matrisen  $\mathbf{X}$  som et bilde etter at koden har kjørt.

**5b**

Koden over har også en invers transformasjon, som reproduserer det opprinnelige bildet fra de transformerte verdiene vi fikk fra koden over. Anta at du nuller ut verdiene i nedre venstre hjørne og øvre høyre hjørne av matrisen  $\mathbf{X}$  etter at koden over har kjørt, og at du deretter reproduserer bildet ved å kjøre denne inverse transformasjonen. Hvilke endringer kan du da forvente i bildet.

**Oppgave 6 Konveksitet**

Anta at  $f$  er en konveks funksjon definert på  $\mathbb{R}$  som også er positiv. Vis at da er  $g(x) = (f(x))^n$  også konveks.

**Oppgave 7 Ikkelineær optimering**

Vi vil finne minimum for funksjonen  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$ , definert på  $\mathbb{R}^n$ . Formuler et steg med Newtons metode, og ett steg med steepest descent metoden, der du setter steglengden  $\alpha_k = 1$ . Hvilken av disse to metodene fungerer best for å finne minimum for funksjoner som er på denne formen?

**Oppgave 8 Ikkelineær optimering**

Vi skal se på følgende optimeringsproblem.

$$\min\{3x + 4y + 5z : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

**8a**

Skriv opp KKT-betingelsene for problemet, og finn minimum ved hjelp av disse.

**8b**

Formuler barriereproblemet for dette problemet, og formuler Newtons metode (med en likhetsbetingelse) for dette problemet, slik at du kan bruke det til å løse barriereproblemet numerisk.

SLUTT