UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra

Eksamensdag: Mandag 13. mai 2013

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 13 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye. Avsluttende eksamen vil inneholde 12 deloppgaver, og vil ha omtrent samme vanskelighetsgrad.

Oppgave 1 Fourierrekker

Regn ut den komplekse Fourierrekka til funksjonen $f(t) = \cos^3(2\pi t/T)$ (der T er perioden til f).

Løsningsforslag: Vi har at

$$
\begin{aligned}
\cos^3(2\pi t/T) &= \left(\frac{1}{2}(e^{2\pi i t/T} + e^{-2\pi i t/T})\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{2\pi i 3t/T} + 3e^{2\pi i t/T} + 3e^{-2\pi i t/T} + e^{-2\pi i 3t/T}) \\
&= \frac{1}{8}e^{2\pi i 3t/T} + \frac{3}{8}e^{2\pi i t/T} + \frac{3}{8}e^{-2\pi i t/T} + \frac{1}{8}e^{-2\pi i 3t/T}.
\end{aligned}
$$

Fra dette ser vi at den komplekse Fourierrekka er gitt ved at $y_1 = y_{-1} = \frac{3}{8}$, og at $y_3 = y_{-3} = \frac{1}{8}$. Det er med andre ord ikke nødvendig å regne ut Fourierintegralene i dette tilfellet, og vi ser også at funksjonen ligger i $V_{3,T}$, og at det er endelig mange ledd i Fourierrekka.

Oppgave 2 Lyd og DFT

2a

Anta at `FFTImpl` of `IFFTImpl` er implementasjoner av DFT og IDFT, respektive. Forklar hva koden nedenfor gjør, linje for linje:

```
[S,fs]=wavread('castanets.wav');
S=S(1:2^(17),1);
y=FFTImpl(S);
y((2^17/4+1):(3*2^17/4))=zeros(2^16,1);
newS=IFFTImpl(y);
```

(Fortsettes på side 2.)

```
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,fs);
playblocking(playerobj)
```

Kommenter spesielt hvorfor vi gjør det som står på tredje nederste linje. Hva slags endringer i lyden forventer du å høre?
Løsningsforslag: På første linje leses en lydfil. På neste linje beholder vi kun lyden i første lydkanal, og vi begrenser oss til å se på de første 2^{17} lydsamplene. Deretter kjører vi en DFT, nuller ut frekvenser som svarer til DFT-indeks melom 2^{15} og $2^{17}-2^{15}-1$, kjører en IDFT, og spiller av den nye lyden. På den tredje siste linjen skalerer vi lydsamplene slik at disse ligger mellom -1 og 1, slik Matlab krever for verdier på lydsampler.

2b

I koden over viser det seg at samplingsfrekvensen er $fs = 44100$Hz. Hvilke frekvenser l lydfila blir dermed berørt av det du gjør i linje 4 i koden?
Løsningsforslag: En ren tone har formen $e^{2\pi i\nu t}$. Når vi sampler denne med samplingfrekvens f_s så får vi den digitale rene tonen $e^{2\pi i\nu k/f_s}$ (der vi har satt $t = kT_s = k/f_s$). Dette svarer til den digitale rene tonen $e^{2\pi ikn/N}$, hvis n tilfredsstiller $\nu/f_s = n/N$. Her er N antall lydsampler, som er 2^{17}. Sammenhengen mellom DFT-indeks n og frekvens f er derfor $\nu = nf_s/N = n \times 44100/2^{17}$. Over nullstilte vi DFT-indekser over $n = 2^{15}$, som da svarer til $\nu = 2^{15} \times 44100/2^{17} = 11025Hz$. Vi gjenkjenner også dette argumentet fra oblig 1 (se løsningsforslaget til denne).

Oppgave 3 Filtre

Et filter S er definert ved likningen

$$z_n = \frac{1}{3}(x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3}).$$

3a

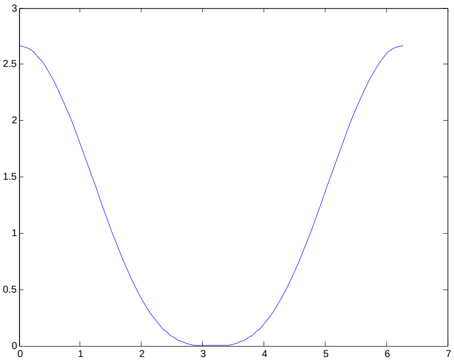
Regn ut og plott (magnituden til den kontinuerlige) frekvensresponsen til filteret, dvs $|\lambda_S(\omega)|$. Er filteret et lavpassfilter eller et høypassfilter?
Løsningsforslag: Filteret har kompakt filternotasjon $\frac{1}{3}\{\underline{1}, 3, 3, 1\}$,slik at $t_0 = t_3 = 1/3$, $t_1 = t_2 = 1$. Vi har at

$$\begin{aligned}
\lambda_S(\omega) = \sum_k t_k e^{-ik\omega} &= \frac{1}{3}(1 + 3e^{-i\omega} + 3e^{-2i\omega} + e^{-3i\omega}) \\
&= \frac{2}{3}e^{-3i\omega/2}\frac{1}{2}(e^{3i\omega/2} + 3e^{i\omega/2} + 3e^{-i\omega/2} + e^{-3i\omega/2}) \\
&= \frac{2}{3}e^{-3i\omega/2}(\cos(3\omega/2) + 3\cos(\omega/2)).
\end{aligned}$$

Fra dette er det greit å plotte frekvensresponsen. Men legg merke til at frekvensresponsen er kompleks, og det er derfor vi plotter magnituden i stedet, det vil si $|\lambda_S(\omega)| = \frac{2}{3}|\cos(3\omega/2) + 3\cos(\omega/2)|$. Figur 1 viser $|\lambda_S(\omega)|$.

Vi ser også at $\lambda_S(0) = \frac{2}{3}$, og at $\lambda_S(\pi) = 0$, slik at filteret er et lavpassfilter.

(Fortsettes på side 3.)



Figur 1: Plott av $|\lambda_S(\omega)|$

3b

Finn et uttrykk for vektor-frekvensresponsen $\lambda_{S,2}$. Hva blir $S\boldsymbol{x}$ når $\boldsymbol{x}$ er vektoren av lengde N med komponenter $e^{2\pi i 2k/N}$?

Løsningsforslag: Bruker vi sammenhengen mellom vektor-frekvensresponsen og den kontinuerlige frekvensresponsen får vi at

$$\lambda_{S,2} = \lambda_S(2\pi 2/N) = \frac{2}{3}e^{-6\pi i/N}(\cos(6\pi/N) + 3\cos(2\pi/N)).$$

Alternativt kan du her regne ut at første søyle i den sirkulante Toeplitz-matrisen for S er gitt ved at $s_0 = t_1$, $s_2 = t_2$, $s_3 = t_3$, og $s_4 = t_4$, og sette dette inn i definisjonen av vektor-frekvensresponsen, $\lambda_{S,2} = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-2\pi i 2k/N}$. Vi vet at $e^{2\pi i 2k/N}$ er en egenvektor for S siden S er et filter, og at $\lambda_{S,2}$ er den tilhørende egenverdien. Derfor blir

$$S\boldsymbol{x} = \lambda_{S,2}\boldsymbol{x} = \frac{2}{3}e^{-6\pi i/N}(\cos(6\pi/N) + 3\cos(2\pi/N))\boldsymbol{x}.$$

Oppgave 4 Tensorprodukter

La $S = \frac{1}{4}\{1, \underline{2}, 1\}$ være et filter.

4a

Hva blir effekten av at du anvender tensorproduktene $S \otimes I$, $I \otimes S$, og $S \otimes S$ på et bilde representert ved en matrise X?

(Fortsettes på side 4.)

Løsningsforslag: Legg først merke til at filteret er et glattingsfilter (lavpassfilter). Vi vet at $S \otimes I$ svarer til å anvende S på søylene i matrisen, slik at resultatet fremkommer ved å anvende et glattingsfilter på søylene i matrisen. Resultatet av dette er at horisontale kanter blir glattet ut. På samme måte svarer $I \otimes S$ til å anvende S på radene i matrisen, og at vertikale kanter blir glattet ut. Til slutt, $S \otimes S$ svarer til anvende S først på søylene i matrisen, så på radene. Dette svarer til at både vertikale og horisontale kanter blir glattet ut. Her kan du eventuelt også argumentere ved å regne ut beregningsmolekylene ("computational molecules") for $S \otimes I$, $I \otimes S$, og $S \otimes S$, som du kan få ved å ta tensorproduktet av filterkoeffisientene $\frac{1}{4}\{1, \underline{2}, 1\}$ med seg selv. Fra disse molekylene blir det også klart at de opererer enten kun på søylene, kun på radene, eller på både rader og søyler.

4b

Regn ut $(S \otimes S)(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y})$, der $\boldsymbol{x} = (4, 8, 8, 4)$, $\boldsymbol{y} = (8, 4, 8, 4)$ (d.v.s både $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ er søylevektorer).
Løsningsforslag: En 4×4 sirkulant Toeplitz matrise for S er

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Fra dette er det det raskt å regne ut at

$$S\boldsymbol{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+1 \\ 4+2+1 \\ 4+2+1 \\ 2+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$S\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1+1 \\ 2+2+2 \\ 4+1+1 \\ 2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Fra dette er det klart at

$$(S \otimes S)(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = (S\boldsymbol{x})(S\boldsymbol{y})^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 \\ 42 & 42 & 42 & 42 \\ 42 & 42 & 42 & 42 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5 Bilder og wavelets

Anta at vi har et bilde gitt ved $N \times N$-matrisen `X`. Vi skal se på følgende Matlab-kode:

```
for s=1:N
  c=(X(1:2:(N-1),s)+X(2:2:N,s))/sqrt(2);
  w=(X(1:2:(N-1),s)-X(2:2:N,s))/sqrt(2);
  X(1:N,s)=[c; w];
end
```

(Fortsettes på side 5.)

```
X=X';

for s=1:N
  c=(X(1:2:(N-1),s)+X(2:2:N,s))/sqrt(2);
  w=(X(1:2:(N-1),s)-X(2:2:N,s))/sqrt(2);
  X(1:N,s)=[c; w];
end
X=X';
```

5a

Kommenter hva koden gjør, og forklar hva du ser hvis du viser frem matrisen `X` som et bilde etter at koden har kjørt.
Løsningsforslag: Koden kjører en DWT over ett nivå, og det er Haar-waveleten som brukes. I innmaten i `for`-løkkene anvendes DWT på hver søyle eller rad i bildet for seg. I den første `for`-løkken anvendes DWT på søylene, i den andre `for`-løkken på radene. I øvre venstre hjørne vil vi etterpå se en versjon av bildet med lavere oppløsning. I de andre tre hjørnene av bildet vil du se forskjellige typer detaljer: I øvre høyre hjørne vil du se detaljer som svarer til raske vertikale endringer, i nedre venstre høyre raske horisontale endringer, mens i nedre høyre hjørner vil punkter der det skjer raske endringer både vertikalt og horisontalt fremheves.

5b

Koden over har også en invers transformasjon, som reproduserer det opprinnelige bildet fra de transformerte verdiene vi fikk fra koden over. Anta at du nuller ut verdiene i nedre venstre hjørne og øvre høyre hjørne av matrisen `X` etter at koden over har kjørt, og at du deretter reproduserer bildet ved å kjøre denne inverse transformasjonen. Hvilke endringer kan du da forvente i bildet?
Løsningsforslag: Ved å nulle ut de to hjørnene så fjerner du detaljer som svarer til raske horisontale og vertikale endringer. Men siden vi beholder nedre høyre hjørne, så beholder vi detaljer som svarer til at det skjer raske endringer både horisontalt og vertikalt i samme punkt. Resultatet blir at vi etter en invers transformasjon ser at de fleste kanter er glattet ut, men vi ser ingen utglattingseffekt i et punkt der vi har endringer i bildet både vertikalt og horisontalt. I sjakkmønster-eksemplet i boka svarer dette til at vi fremover gridpunktene i sjakkmønsteret, men at vi glatter ut de horisontale og vertikale kantene på sjakkbrettet.

Oppgave 6 Konveksitet

Anta at f er en konveks funksjon definert på $\mathbb{R}$ som også er positiv. Vis at da er $g(x) = (f(x))^n$ også konveks.
Løsningsforslag: Siden f er konveks så er

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Men da er også

$$(f((1-\lambda)x + \lambda y))^n \leq ((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))^n.$$

(Fortsettes på side 6.)

Siden $h(y) = y^n$ er konveks for $y > 0$ (siden $h''(y) > 0$), og siden f er positiv, så er $((1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))^n \leq (1-\lambda)(f(x))^n + \lambda(f(y))^n$, slik at

$$\begin{aligned} g((1-\lambda)x + \lambda y) &= (f((1-\lambda)x + \lambda y))^n \\ &\leq (1-\lambda)(f(x))^n + \lambda(f(y))^n = (1-\lambda)g(x) + \lambda g(y). \end{aligned}$$

Det følger at $g(x) = (f(x))^n$ er konveks.

Det er kanskje enda lettere å vise dette under antagelsen at g er to ganger deriverbar. Da har vi at $g'(x) = n(f(x))^{n-1}f'(x)$, og

$$g''(x) = n(f(x))^{n-1}f''(x) + n(n-1)(f(x))^{n-2}(f'(x))^2.$$

Siden $f''(x) \geq 0$ siden f er konveks, og siden $f(x)$ er positiv, så vil $g''(x)$ også være positive, slik at g også er konveks.

Oppgave 7 Ikkelineær optimering

Vi vil finne minimum for funksjonen $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$, definert på $\mathbb{R}^n$. Formuler et steg med Newtons metode, og ett steg med steepest descent metoden, der du setter steglengden $\alpha_k = 1$. Hvilken av disse to metodene fungerer best for å finne minimum for funksjoner som er på denne formen?
Løsningsforslag: Vi har at $\nabla f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$, og at $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = A$. Ett steg med Newtons metode med $\alpha_k = 1$ blir dermed

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - (\nabla^2 f(\boldsymbol{x}))^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_k - A^{-1}(A\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b}) = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Ett steg med steepest descent med $\alpha_k = 1$ blir

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \nabla f(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{x}_k - (A\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b}) = (I - A)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}.$$

Det er klart at Newtons metode her er best, siden denne svarer til å finne minimum for andreordens-tilnærmingen når $\alpha_k = 1$, og her er funksjonen lik andreordens-tilnærmingen.

Oppgave 8 Ikkelineær optimering

Vi skal se på følgende optimeringsproblem.

$$\min\{3x + 4y + 5z : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

8a

Skriv opp KKT-betingelsene for problemet, og finn minimum ved hjelp av disse.
Løsningsforslag: Vi setter $f(x, y, z) = 3x + 4y + 5z$, og betingelsene kan skrives

$$\begin{aligned} h_1(x,y,z) &= x + y + z - 1 = 0 \\ g_1(x,y,z) &= -x \leq 0 \\ g_2(x,y,z) &= -y \leq 0 \\ g_3(x,y,z) &= -z \leq 0. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Gradientene blir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \nabla h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Det er klart at gradientene til betingelsene er lineært avhengige hvis og bare hvis alle ulikhetene er aktive, det vil si hvis $x = y = z = 0$, men da er ikke $h_1(x, y, z) = 0$. Dette betyr at alle punkter er regulære. KKT-betingelsene er at $x + y + z = 1$, samt likningen

$$\nabla f + \lambda \nabla h_1 + \mu_1 \nabla g_1 + \mu_2 \nabla g_2 + \mu_3 \nabla g_3 = \mathbf{0}.$$

der $\mu_i = 0$ hvis g_i ikke er aktiv, og der $\mu_i \geq 0$. Flytter vi $\mu_i \nabla g_i$ over på høyre side, og setter inn for gradientene får vi likningene

$$\begin{aligned} 3 + \lambda &= \mu_1 \\ 4 + \lambda &= \mu_2 \\ 5 + \lambda &= \mu_3 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Hvis ingen ulikheter er aktive så blir da $3 + \lambda = 4 + \lambda = 5 + \lambda$, som er umulig. På samme måte, hvis kun en av ulikhetene er aktive så må to av $3 + \lambda, 4 + \lambda, 5 + \lambda$ være like (siden to av høyresidene da er 0), og dette er også umulig. Hvis alle ulikhetene er aktive ender vi som over opp med at $x = y = z = 0$ som jo ikke oppfylte $x + y + z = 1$. Eneste mulighet er derfor at nøyaktig to ulikheter er aktive. Vi har da tre forskjellige muligheter

- g_2, g_3 er aktive: Den første likningen over gir da at $\lambda = -3$. Dette innsatt i de to neste likningene gir at $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$, og dette er tillatt. Siden $y = z = 0$ så gir den siste likningen oss at $x = 0$. Dette gir oss altså kandidaten $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.
- g_1, g_3 er aktive: Den andre likningen gir da at $\lambda = -4$. Dette innsatt i den første likningen gir at $\mu_1 = -1$, som ikke er tillatt.
- g_1, g_2 er aktive: Den tredje likningen gir da at $\lambda = -5$. Dette innsatt i den første likningen gir at $\mu_1 = -2$, som ikke er tillatt.

Alt i alt får vi bare en kandidat til minimum, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, og minimumsverdien blir $f(1, 0, 0) = 3$.

8b

Formuler barrierproblemet for dette problemet, og formuler Newtons metode (med en likhetsbetingelse) for dette problemet, slik at du kan bruke det til å løse barrierproblemet numerisk.

Løsningsforslag: I en eksamensoppgave ville vi ikke kreve at du skal reprodusere alle detaljene nedenfor. Det viktigste her er at du skjønner at Newtons metode krever en tilpasning, siden det er en likhetsbetingelse inne i bildet i tillegg. Barrierproblemet blir å minimere

$$\begin{aligned} f_b(x, y, z) &= f(x, y, x) + \mu \phi(x) \\ &= f(x, y, z) - \mu \ln(-g_1(x, y, z)) - \mu \ln(-g_2(x, y, z)) - \mu \ln(-g_3(x, y, z)) \\ &= f(x, y, z) - \mu \ln x - \mu \ln y - \mu \ln z \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 8.)

Under betingelsen $h_1(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$. Newtons metode anvendt på f_b med likhetsbetingelse svarer til å minimere andreordens-tilnærmingen

$$f_b(\boldsymbol{x}_k) + \nabla f_b(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^T \nabla^2 f_b(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}$$

i $\boldsymbol{h}$ (der $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{h}$), under betingelsen $x_{k+1} + y_{k+1} + z_{k+1} = 1$, $x_k + y_k + z_k = 1$, det vil si at $h_x + h_y + h_z = 0$, der $\boldsymbol{h} = (h_x, h_y, h_z)$. Her kan betingelsen skrives som $A\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$, der $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, som har gradient A^T. Andreordens-tilnærmingen har gradient $\nabla f_b(\boldsymbol{x}_k) + \nabla^2 f_b(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h}$. Newtons metode svarer derfor til å løse $\nabla f_b(\boldsymbol{x}_k) + \nabla^2 f_b(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h} + A^T\lambda = \boldsymbol{0}$ under betingelsen $A\boldsymbol{h} = 0$. Dette kan skrives

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_b(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{h} + A^T\lambda &= -\nabla f_b(\boldsymbol{x}_k) \\ A\boldsymbol{h} &= 0, \end{aligned}$$

som, akkurat som i starten av kap. 6 i kompendiet, kan skrives som

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 f_b(\boldsymbol{x}_k) & A^T \\ A & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{h} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_b(\boldsymbol{x}_k) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Her kan man i tillegg sette inn

$$\begin{aligned} \nabla f_b &= \nabla f - \mu \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1/x \\ 4 - 1/y \\ 5 - 1/z \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f_b &= \begin{pmatrix} 1/x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

som gjør at dette også kan løses numerisk med programmet vi laget i kompendiet.

SLUTT