UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra prøveeksamen

Eksamensdag: Fredag 16. mai 2014

Tid for eksamen: 00.00 – 23.59

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 12 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye. Avsluttende eksamen vil inneholde like mange deloppgaver, og vil ha omtrent samme vanskelighetsgrad.

Oppgave 1 Fourierrekker

Regn ut den komplekse Fourierrekka til funksjonen som er periodisk med periode T, og som er definert ved at $f(t) = e^{2\pi it/(0.49\cdot T)}$ på $[0,T]$ (her er altså funksjonen vår kompleks, som er litt uvant for oss). Kan du tenke deg en forklaring hvorfor y_2 er den største av Fourierkoeffisientene?

Oppgave 2 Lyd og DFT

2a

I en wav-fil med en lydkanal har vi samplet lyd med samplingsfrekvens $f_s = 44100$Hz. Anta at det er 2^{23} lydsampler i filen, og at du gjør en DFT av lengde N på lydsamplene. Hvis du skal nulle ut frekvenser mellom 5000Hz og 8000Hz, hvilke DFT-indekser er det da som skal nulles ut?

2b

Vi kjører følgende kode på en lydfil:

```
[S,fs]=wavread('castanets.wav');
S=S(1:2^(17),1);
N=length(S);
newS=[S(1)-S(N); S(2:N)-S(1:(N-1))];
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,fs);
playblocking(playerobj)
```

(Fortsettes på side 2.)

Hva gjør koden, og hvilket filter er det som blir kjørt på lyden? Hvilke endringer gjør filteret med lyden? Hvorfor er den tredje nederste linja nødvendig?

Oppgave 3 Filtre

Et filter S er definert ved likningen

$$z_n = \frac{1}{16}(x_n + 4x_{n-1} + 6x_{n-2} + 4x_{n-3} + x_{n-4}).$$

3a

Regn ut og plott (magnituden til den kontinuerlige) frekvensresponsen til filteret, dvs $|\lambda_S(\omega)|$. Er filteret et lavpassfilter eller et høypassfilter?

3b

Skriv ned en 12×12 sirkulant Toeplitz-matrise som svarer til å anvende S. Finn en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ slik at $S\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (med andre ord, S er ikke inverterbar).

3c

Et annet filter S_2 har frekvensrespons $\lambda_{S_2}(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega})$. Hva blir filterkoeffisientene til $(S_2)^4$, d.v.s. filteret du får når du anvender S_2 4 ganger etter hverandre?

Oppgave 4 Tensorprodukter

Hvis f er en funksjon, og x_i er funksjonsverdier til f samplet uniformt, så gir

$$z_n = x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$$

en tilnærming til den andrederiverte i de samme punktene (opp til multiplikasjon med en konstant). La oss kalle det tilsvarende filteret for S.

4a

Bruk tilnærmingen til den andrederiverte over til å skrive opp et computational molecule som svarer til at man først dobbelderiverer alle radene, deretter dobbelderiverer alle søylene.

4b

Hva blir effekten av at du anvender tensorproduktene $S \otimes I$, $I \otimes S$, og $S \otimes S$ på et bilde representert ved en matrise X?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5 Wavelets

Anta at vi har vektoren

$$\boldsymbol{x} = (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots)$$

med lengde $2^{10} = 1024$. Hva blir resultatet hvis du kjører en DWT med Haar-waveleten over 10 nivåer ("m-level DWT") på $\boldsymbol{x}$?
Hint: komponentene i $\boldsymbol{x}$ er koordinater til en funksjon $f \in V_{10}$ i basisen $\boldsymbol{\phi}_{10}$ (ϕ er skaleringsfunksjonen vi har definert for Haar-waveleten). Vis at $f \in W_8$ (fra dette vil du kunne rgne ut koordinatene ganske greit. De siste to års eksamensoppgaver har en oppgave av tilsvarende typen).

Oppgave 6 Konveksitet (vanskeligere enn det dere vil få på eksamen!)

Anta at $f(x)$ og $g(x)$ er konvekse funksjoner definert på $\mathbb{R}$ som også er positive, og voksende. Vi skal gjennom et par steg vise at da er $f(x)g(x)$ også konveks.

6a

Vis at

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x)g(x) + (1-\lambda)f(y)g(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\geq \lambda(1-\lambda)(f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x))
\end{aligned}$$

6b

Forklar hvorfor det fra a. følger at $f(x)g(x)$ er konveks (hint: start med å skrive $f(x)g(x) + f(y)g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)$ som et produkt).

Oppgave 7 Ikkelineær optimering

Vi vil finne minimum for funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

under betingelsene $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. Formuler KKT-betingelsene for dette problemet, og finn minimum ved å løse disse.

SLUTT