6. mars, 2014

MAT-INF 2360: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 3/4-2014, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres i obligkassa som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 torsdag 3/4*. Du kan også levere via devilry. Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv, for hånd eller på datamaskin.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 8558 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Det oppfordres til samarbeid underveis i arbeidet med oppgavene, og gruppelærer og forelesere har anledning til å svare på generelle spørsmål, men kan ikke servere ferdige løsninger. *Den endelige besvarelsen som du leverer skal utarbeides av deg selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om avskrift).*

Husk at de tre obligatoriske oppgavene i MAT-INF 2360 alle må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne andre obligatoriske oppgaven må du gjøre seriøse løsningsforsøk på alle oppgavene unntatt Oppgave 7 (siden denne anses som vanskeligere), og minst 6 av de 8 deloppgavene bør være riktig besvart.*

Du kan selv velge om du vil programmere i Matlab eller Python. Teksten nedenfor baserer seg på Matlab, men du kan gi funksjonene du programmerer like navn i Python. Forskjellene mellom Python og Matlab kommenteres nedenfor.

Vi skal se på en multiresolusjonsanalyse (MRA), der skaleringsfunksjonen ϕ oppfyller likningen

$$\phi_{0,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\phi_{1,2n-2}(t) + \frac{1}{2}\phi_{1,2n-1}(t) + \frac{3}{4}\phi_{1,2n}(t) + \frac{1}{2}\phi_{1,2n+1}(t) + \frac{1}{8}\phi_{1,2n+2}(t)\right). \tag{1}$$

Vi definerer $\phi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\phi(2^m t-n)$, basisene $\boldsymbol{\phi}_m$, og resolusjonsrommene V_m, som i boka. Vi definerer i tillegg

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t), \tag{2}$$

og $\psi_{m,n}(t) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$, basisene $\boldsymbol{\psi}_m$, og detaljrommene W_m, som i boka.

1. Skriv opp koordinatskiftematrisen $P_{\boldsymbol{\phi}_1 \leftarrow \mathscr{C}_1}$ (dvs. IDWT-matrisen) når $N = 8$, ved å bruke likningene (1) og (2) ($\mathscr{C}_1$ er definert i Kapittel 6 i kompendiet, og koordinatskiftematrisen skal her bli en 16×16-matrise). Ut fra denne skriv også opp filtrene G_0, G_1 (slik de er definert i Definisjon 6.4 s. 202), ved hjelp av kompakt filternotasjon.
Hint: Prøv å kopiere hvordan vi i kompendiet setter opp Likning (6.3), (6.4), og (6.5), fra uttrykk på tilsvarende form som (1) og (2).

La $\phi^{(1)}$ være skaleringsfunksjonen vi brukte for stykkekvis lineære funksjoner (Likning (5.22) i kompendiet). Man kan vise at funksjonen

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(1)}(x)\phi^{(1)}(t-x)\,dx \tag{3}$$

oppfyller likning (1) (innen matematikk kalles uttrykk som (3) for konvolusjonen av to funksjoner og man skriver $\phi = \phi^{(1)} * \phi^{(1)}$), og at

1. ϕ er 2 ganger deriverbar overalt,
2. ϕ er lik et tredjegradspolynom på hvert intervall $[n, n+1]$,
3. ϕ er 0 utenfor $(-2, 2)$,
4. funksjonene $\{\phi(t-n)\}_{n=0}^{N-1}$ er lineært uavhengige.

Du kan ta disse tingene for gitt, og også at for enhver funksjon f finnes det et unikt tredjegradspolynom som oppfyller 1. og 2., og som har samme funksjonsverdier som f.

2. Fra punktene 1.-4. ovenfor, gi en kort beskrivelse av resolusjonsrommene V_m, og hva slags funksjoner de inneholder. Tror du vår nye MRA er bedre eller dårligere med tanke på approksimasjon av funksjoner, sammenlignet med MRA'ene fra kompendiet med stykkevis lineære- og konstante funksjoner?

Siden det er opplagt at $\phi^{(1)} \geq 0$, så vil også $\phi \geq 0$, og dermed også $\psi \geq 0$, slik at ψ ikke kan ha noen forsvinnende momenter, slik dette er definert rett etter Observasjon 5.15 i kompendiet.

3. La oss definere

$$\hat{\psi} = \psi - \alpha\phi_{0,0} - \beta\phi_{0,1} - \gamma\phi_{0,-1} - \delta\phi_{0,2}, \tag{4}$$

og forsøke å finne $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ slik at $\hat{\psi}$ har fire forsvinnende momenter. Definer

$$a_k = \int_0^N t^k \phi_{0,0} dt \quad b_k = \int_0^N t^k \phi_{0,1} dt \quad g_k = \int_0^N t^k \phi_{0,-1} dt \quad d_k = \int_0^N t^k \phi_{0,2} dt$$
$$e_k = \int_0^N t^k \psi(t) dt.$$

Forklar at hvis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ løser likningen

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & g_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & g_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & g_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & g_3 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

så vil $\hat{\psi}$ ha fire forsvinnende momenter.

4. Vi kjører en IDWT ved hjelp av filtrene G_0, G_1 fra Oppgave 1, på vektoren

$$(\underbrace{-\alpha, -\beta, -\delta, 0\ldots, 0, -\gamma}_{N}, \underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{N})$$

(der det totalt er listet opp $2N$ elementer), og der vi fant α, β, γ, δ i Oppgave 3. Da får du en koordinatvektor for en funksjon i basisen $\boldsymbol{\phi}_1$. Hvilken funksjon er det du får koordinatvektoren til? Du skal ikke regne ut noe her!

Det er klart at integralet fra Likning (3) kan regnes ut eksakt, og at integralene a_k, b_k, g_k, d_k, e_k dermed også kan regnes ut eksakt. Dermed kan også $\hat{\psi}$ regnes ut eksakt. Gjør vi dette kan vi finne at MRA'en som bruker ϕ som skaleringsfunksjon og $\hat{\psi}$ som moderwavelet, har filtre som kan skrives

$$\begin{aligned}
G_0 &= \frac{1}{16}\{1, 4, \underline{6}, 4, 1\} \\
G_1 &= \frac{1}{128}\{5, 20, 1, -96, -70, \underline{280}, -70, -96, 1, 20, 5\} \\
H_0 &= \frac{1}{128}\{-5, 20, -1, -96, 70, \underline{280}, 70, -96, -1, 20, -5\} \\
H_1 &= \frac{1}{16}\{1, -4, \underline{6}, -4, 1\}
\end{aligned} \tag{6}$$

Du skal slippe å utlede disse uttrykkene! Her har vi i tillegg skalert filtrene slik at $\sqrt{2}$ (som var med i uttrykkene for G_0 og G_1 i Oppgave 1) ikke er med lenger.

5. Det viser seg at filtrene over kan brukes i forbindelse med tapsfri kompresjon av lyd og bilder. Prøv å forklare dette ut fra uttrykkene over for filterkoeffisientene.

6. Plott frekvensresponsene til filtrene G_0 og G_1 i Likning 6, og karakteriser filtrene som lavpass- eller høypass-filtre. Hvordan stemmer dette med de andre filtrene i kompendiet?

7 (Vanskelig). Kjør følgende kode, der funksjonen `IDWTImpl` beskrevet i Seksjon 6.3 blir kjørt:

```
s=1;
v0coords=[0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0];
vmcoords=IDWTImpl(g0,g1,[v0coords; zeros(8*2^(s+1)-8,1)],s+1);
subplot(1,2,1);
plot(linspace(-4,4,8*2^(s+1)),2*((s+1)/2)*vmcoords);

w0coords=[0; 0; 0; 0; 1; 0; 0; 0];
vmcoords=IDWTImpl(g0,g1,[zeros(8,1); w0coords; zeros(16*2^s-16,1)],s+1);
subplot(1,2,2);
plot(linspace(-4.5,3.5,8*2^(s+1)),2*((s+1)/2)*vmcoords);
```

Det ser ut som plottene konvergerer når s øker. Hva er det som vises? Du trenger ikke kommentere all linjene i koden, det er nok at du kommer med en kvalifisert gjetning på hva som blir vist.
Hint: Du trenger å vite at hvis $f \in V_0$, og du gjør et koordinatskifte til $\boldsymbol{\phi}_m$ ved hjelp av IDWT, så vil et plott av de nye koordinatene til f vise en fasong som ligner mer og mer på fasongen til f når m øker. Hvorfor legger jeg til nuller inne i for-løkka?

8 (Eksperimenter på lyd). I oppgave 3 og 4 i Seksjon 6.3 implementerte du to Matlab-funksjoner, `playDWTfilterslower` og `playDWTfilterslowerdifference`, som gjorde at du kunne høre på approksimasjoner av lydfila `castanets.wav` fra forskjellige V_m, samt detaljdelen (delen fra $W_0 \oplus \cdots \oplus W_{m-1}$). Skriv kode som kaller disse funksjonene der m løper fra 1 til 4, og der filterne fra Likning 6 blir brukt. Sammenlign det du hører med det du hørte når du spilte av med Haar-waveleten i stedet. Hvis du programmerer i Python vil du finne alle funksjonene du trenger (med eksempler nederst) på
http://folk.uio.no/oyvindry/matinf2360/matlab/kap6/DWTfuncs.py