LP. Leksjon 1. Kapittel 1 og 2: eksempel og simpleksmetoden

Dette emnet gir en innføring i lineær optimering og tilgrensende felt.

- hva er LP (lin.opt.=lin.programmering)
- mer generelt: matematisk optimering
- teori, metoder, anvendelser
- notatene er basert på R. Vanderbei, "Linear programming: foundations and extensions", Third edition, Springer (2008). (You may also use Second Ed., Kluwer (2001)).

- et praktisk eksempel: produksjonsplanlegging
- simpleksalgoritmen, noen begreper
- algoritmen

Hva er lineær optimering?

- Lineær optimering er å maksimere en lineær funksjon i flere variable med begrensinger som er lineære likninger og lineære ulikheter.

Eksempel: produksjonsplanlegging

Produkter:

- glassdør
- vindu

Produksjonsanlegg:

- Anlegg 1: alum. ramme produksjon
- Anlegg 2: treramme produksjon
- Anlegg 3: glassproduksjon og montering

Produksjon (av hvert produkt) foregår i serier på 200 stk.
Data:

	Timer/serie		Timer disp.
	dør	vindu	
Anlegg 1	1	0	4
Anlegg 2	0	2	12
Anlegg 3	3	2	18
Fortjeneste/serie	3000	5000	

Problem: Hvor mye bør vi produsere av hvert produkt for å maksimere fortjenesten?

Produksjonsplan som LP problem:

$$
\begin{array}{llll}
\text{maksimer} & 3x_1 + & 5x_2 & \\
\text{forutsatt at} & & & \\
& x_1 & & \leq 4 \\
& & 2x_2 & \leq 12 \\
& 3x_1 + & 2x_2 & \leq 18 \\
& \multicolumn{3}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.}
\end{array}
$$

- Vi vil finne en **optimal løsning**, dvs. en vektor (x_1, x_2) som oppfyller alle begrensningene og som har maksimal verdi på funksjonen $3x_1 + 5x_2$.
- En vektor som oppfyller alle begrensningene kalles en **tillatt løsning**.
- Funksjonen vil ønsker å maksimere kalles **objektivfunksjonen**.

Senere skal vi jobbe med LP problemer på matriseform; da ser det slik ut

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{f.a.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq O \end{array}$$

Her er c og x kolonnevektorer med n komponenter, A er en $m \times n$ matrise og b er en kolonnevektor med m komponenter. O betgner nullvektoren (av passende lengde). Ulikheten $Ax \leq b$ er en vektorulikhet og betyr at $\leq$ holder komponentvis (for hver komponent).
Analyse av problemet, og metoder for å løse LP problemer, bygger på lineær algebra.

LP er nært knyttet til teori/metoder for å løse systemer av lineære ulikheter. Slike systemer er på formen

$$Hx \leq f$$

der H er en $m \times n$ matrise og f er en kolonnevektor (lengde m).

Eksempel.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 17 \\ -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Sentrale spørsmål:

- eksistens av løsning
- hvordan finne én løsning, evt. *alle* løsninger

Slike problemer kan skrives som LP problemer: la objektivfunksjonen ha alle koefissienter lik 0. Mer om lineære ulikheter senere.

Simpleksmetoden

Simpleksmetoden er en generell metode for å løse alle LP problemer.

- Skal etterhvert skille mellom simpleksmetoden og simpleksalgoritmen, men behøver ikke tenke på dette nå.
- Metoden ble utviklet av George B. Dantzig rundt 1947 i forbindelse med transportproblemer i U.S. Air Force.
- Arbeidet ble publisert i 1951.
- En interessant artikkel (nekrolog) fra Washington Post i 2005 ligger på nettsiden; Dantzig døde i 2005.

Simpleksalgoritmen, eksempel

Andre tidlige bidragsytere var T.J.Koopmans og L.V.Kantorovich, og disse to fikk Nobel prisen i økonomi for dette arbeidet i 1975.
Eksempel: Vil løse

$$
\begin{array}{lllll}
\text{maksimer} & 5x_1+ & 4x_2+ & 3x_3 & \\
\text{forutsatt at} & & & & \\
\text{(i)} & 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & \leq 5 \\
\text{(ii)} & 4x_1+ & x_2+ & 2x_3 & \leq 11 \\
\text{(iii)} & 3x_1+ & 4x_2+ & 2x_3 & \leq 8 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & &
\end{array}
$$

Konverterer til likninger ved å innføre slakkvariable for hver $\leq$-ulikhet: f.eks. erstattes (i) av

$$w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad \text{og } w_1 \geq 0.$$

Får da problemet på **basislisteform** (*dictionary*):

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
\text{maksimer} & \eta & = & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & & \\
\text{(i)} & w_1 & = 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
\text{(ii)} & w_2 & = 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
\text{(iii)} & w_3 & = 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\
 & & \multicolumn{7}{c}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0.}
\end{array}$$

- Venstre side: avhengige variable = basisvariable.
- Høyre side: uavhengige variable = ikkebasisvariable.

Startløsning: Lar $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ og dermed får vi $w_1 = 5, w_2 = 11, w_3 = 8$.

Vi lar alltid ikkebasisvariable være 0. Basisvariablene blir bestemt entydig, nemlig lik konstantene på høyre side.

Har vi optimal løsning? Nei!!
Vi kan f.eks. øke x_1 mens vi fortsatt lar $x_2 = x_3 = 0$. Da vil

- η øke
- vi får nye verdier på basisvariablene som blir bestemt fra x_1
- jo mer vi øker x_1 jo mer øker η!
- men pass på: w_j-ene nærmer seg null!

Maksimal økning av x_1: vil unngå at basisvariable blir negative. Fra $w_1 = 5 - 2x_1$, $w_2 = 11 - 4x_1$ og $w_3 = 8 - 3x_1$ får vi at $x_1 \leq 5/2$, $x_1 \leq 11/4$, $x_1 \leq 8/3$ så vi kan øke x_1 til den minste verdien, nemlig 5/2.
Dette gir den nye løsningen $x_1 = 5/2$, $x_2 = x_3 = 0$ og dermed $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 1/2$. Og nå er $\eta = 25/2$. Altså: en mye bedre løsning!!

Hvordan komme videre? Basislisteform er fin for å teste optimalitet, så vi vil komme over i neste basisliste!

- Vi ønsker at x_1 og w_1 skal "bytte side". Altså: x_1 skal gå *inn* i basis, mens w_1 går **ut** av basis. Dette kan gjøres ved å bruke w_1-likningen til å eliminere x_1 fra alle andre likninger.
- Ekvivalent: bruker elementære radoperasjoner på systemet for å eliminere x_1: (i) løser for x_1: $x_1 = 5/2 - (1/2)w_1 - (3/2)x_2 - (1/2)x_3$, og (ii) adderer passende multippel av denne likningen til de andre slik at x_1 forsvinner og erstattes av ledd med w_1.

Husk: elementære radoperasjoner endrer ikke løsningsmengden.

Resultat:

$$\begin{array}{lllllllll}
\eta & = 12.5 & - & 2.5w_1 & - & 3.5x_2 & + & 0.5x_3 \\
\hline
x_1 & = 2.5 & - & 0.5w_1 & - & 1.5x_2 & - & 0.5x_3 \\
w_2 & = 1 & + & 2w_1 & + & 5x_2 & & \\
w_3 & = 0.5 & + & 1.5w_1 & + & 0.5x_2 & - & 0.5x_3
\end{array}$$

Vi har nå gjennomført en pivotering: bruk av elem. radoperasjoner for å bytte to variable (en inn og en ut av basis).

Gjentar prosessen!

Optimal? Nei: kan øke η ved å øke x_3 fra null! Kan øke til $x_3 = 1$ for da blir $w_3 = 0$ (mens de andre basisvariablene er ikkenegative).

Gjennomfører en ny pivotering: x_3 inn i basis, og w_3 ut av basis. Får den nye basislisten:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = 13 & - & w_1 & - & 3x_2 & - & w_3 \\
\hline
x_1 & = 2 & - & 2w_1 & - & 2x_2 & + & w_3 \\
w_2 & = 1 & + & 2w_1 & + & 5x_2 & & \\
x_3 & = 1 & + & 3w_1 & + & x_2 & - & 2w_3
\end{array}
$$

Her ser vi at alle koeffisientene foran ikkebasisvariable er ikkepositive (faktisk negative) i likningen for η. Da vil enhver økning av en eller flere ikkebasisvariable gi en løsning med $\eta \leq 13$.

Men enhver tillatt løsning kan finnes ved passende verdier på ikkebasisvariablene! Hvorfor?

Konklusjon: vi har funnet en optimal løsning! Den er $w_1 = x_2 = w_3 = 0$ og $x_1 = 2, w_2 = 1, x_3 = 1$. Verdien på η er da 13, og dette kalles optimal verdi.

Simpleksmetoden, generelt

Betrakt et generelt LP problem

$$
\begin{array}{lrll}
\text{maksimer} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
\text{forutsatt at} & & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

der vi antar at $b_i \geq 0$ for alle $i \leq m$.

Innfører slakkvariable:

$$\begin{array}{lcl} \eta & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{for } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Behøver ikke skille slakkvariable og opprinnelige variable og får basislisten:

$$\begin{array}{lcl} \eta & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ x_{n+i} & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{for } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

der vi har erstattet w_i med x_{n+i}. Så $x \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Algoritmen starter med basislisten foran der $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ er basisvariable og $x_1, \ldots, x_n$ er ikkebasisvariable. La

- B være indeksmengden til basisvariablene
- N være indeksmengden til ikkebasisvariablene.

Så, i starten er $B = \{n+1, \ldots, n+m\}$, $N = \{1, \ldots, n\}$. Initiell tillatt løsning er

$$\begin{aligned} x_j &= 0 \quad \text{for } j = 1, \ldots, n \\ x_{n+i} &= b_i \quad \text{for } i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

og tilhørende verdi er $\eta = 0$. En slik løsning kalles en basisløsning.

Hver iterasjon er en pivotering (eller basisskifte) der

- en indeks k flyttes fra N til B (x_k er inngående variabel; ny basisvariabel fordi den øker η),
- en annen indeks l flyttes fra B til N (x_l er utgående variabel; variabel går ut av basis fordi den blir 0) og
- vi finner en ny basisliste fra den gamle vha. radoperasjoner
- til den nye basislisten hører en ny tillatt basisløsning.

Ved starten av hver pivotering har vi basislisten (med $\bar{b}_i \geq 0$):

$$\begin{aligned} \eta &= \bar{\eta} + \textstyle\sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \\ x_i &= \bar{b}_i - \textstyle\sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j \quad \text{for } i \in B. \end{aligned}$$

Valg av inngående variabel: velg en $k \in N$ med $\bar{c}_k > 0$. Hvis ingen slik fins, er nåværende løsning optimal og vi stopper. Ofte er mange $\bar{c}_j$'er positive. Da finnes flere prinsipper for valg, men et enkelt, mye brukt prinsipp er å velge $k = j$ med $\bar{c}_j$ størst mulig. Hvorfor?
Valg av utgående variabel: Også her kan vi ha valgmuligheter. Må først bestemme maksimal økning av inngående variabel x_k. Fra

$$x_i = b_i - \bar{a}_{ik} x_k \quad \text{for } i \in B$$

ser vi at

- hvis $\bar{a}_{ik} \leq 0$, vil x_i øke når x_k økes. Slike basisvariable vil altså ikke kunne bli null (vi antar foreløpig at $\bar{b}_i > 0$)
- hvis derimot $\bar{a}_{ik} > 0$, vil x_i avta og blir null når

$$x_k = b_i / \bar{a}_{ik}.$$

Valg av utgående variabel, forts. Altså: vi kan øke x_k til verdien

$$\theta := \min\{b_i/\bar{a}_{ik} : \bar{a}_{ik} > 0\}.$$

Hva skjer når $x_k = \theta$?
Jo, alle variable er stadig ikkenegative. Bra! Og minst en basisvariabel er blitt 0, faktisk blir $x_i = 0$ for alle $i \in B$ som oppfyller

$$b_i/\bar{a}_{ik} = \theta.$$

Konklusjon: Utgående variabel x_l velges slik at

$$b_l/\bar{a}_{l,k} = \min\{b_i/\bar{a}_{ik} : \bar{a}_{ik} > 0\}.$$

Pivotregel: en regel som sier hvilken inngående variabel og hvilken utgående variabel som skal velges når det fins valgmuligheter. Dette gir en lang rekke varianter av simpleksmetoden.

Pivoteringen avsluttes med radoperasjonene:
anta at x_k er inngående og x_l er utgående variabel. Da er altså x_l på venstre side i "likning nr. l":

$$x_l = \bar{b}_l - \sum_{j \in N} \bar{a}_{l,j} x_j$$

For hver likning $i \neq l$ adderer vi
$\bar{a}_{ik}/\bar{a}_{lk}$ ganger likning l til likning i.
Videre brukes likning l til å uttrykke x_k som funksjon av de andre variablene.

Resultat: et ekvivalent likningssystem (samme løsninger) med koeffisient 0 foran x_k i hver likning $i \neq l$. Videre er nye basisbariable på venstre side! Dette er den nye basislisten.

Kommentarer

Noen spørsmål som gjenstår:

- hvordan finne en tillatt startløsning hvis det finnes negative b_i'er?
- i en basisliste: hva skjer hvis noen $\bar{b}_i$ er 0? Ødelegger dette for pivoteringen?
- er det sikkert at algoritmen terminerer?
- og, hvis ikke, hvordan kan vi eventuelt reparere dette?

Skal se på dette i Leksjon 2!

Til slutt ser vi på en viktig anvendelse av LP: lineær l_1-approksimasjon.

Anvendelse: lineær approksimasjon

La $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ og $b \in \mathbb{R}^m$, og la a_i være i'te rad i A oppfattet som kolonnevektor. Minner om at l_1-normen til en vektor $y \in \mathbb{R}^n$ er $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$.
Det lineære approksimasjonsproblemet

$$\min\{\|Ax - b\|_1 : x \in \mathbb{R}^n\}$$

kan løses som følgende LP problem

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^m z_i & \\ \text{f.a.} & & \\ & a_i^T x - b_i & \leq z_i \quad (i \leq m) \\ & -(a_i^T x - b_i) & \leq z_i \quad (i \leq m) \end{array}$$

Bevis: Fordi enhver optimal løsning i dette problemet vil oppfylle $z_i = |a_i^T x - b_i|$ for hver $i \leq m$. $\square$

Dette betyr at man har en alternativ metode til tradisjonell minste kvadraters metode ($\min\{\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{R}^n\}$) og slike problemer dukker opp i en lang rekke anvendelser.

En tilsvarende LP basert metode kan brukes på det lineære approksimasjonsproblemet

$$\min\{\|Ax - b\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n\}$$

i ℓ_∞-normen gitt ved $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$.