LP. Leksjon 2. Kapittel 2: simpleksmetoden, forts.

- initialisering
- to faser
- ubegrenset løsning
- geometri

Repetisjon

- LP problem
- tillatt løsning, optimal løsning
- basisliste
- basis, basisvariable og ikkebasisvariable
- pivotering
- se eksempel fra Leksjon 1

Initialisering

LP problem:

$$\begin{array}{lrll} \text{maksimer} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{forutsatt at} & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Innfører slakkvariable og får problemet på basislisteform:

$$\begin{array}{lcl} \eta & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{for } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Så hvis $b_i \geq 0$ for alle $i \leq m$ finner vi en initiell tillatt løsning ved å la

$$\begin{array}{ll} w_i = b_i & \text{for alle } i \leq m \text{ og} \\ x_j = 0 & \text{for alle } j \leq n. \end{array}$$

Problem: hva hvis noen b_i'er er negative?

Løsning:

- oppfatter det å finne en første tillatt løsning som et nytt problem
- dette problemet kan skrives som et LP problem!
- det nye LP problemet kalles Fase I problemet
- heldigvis: det er lett å finne en startløsning i Fase I problemet!

Fase I problemet:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{maksimer} & -x_0 & & \\
\text{forutsatt at} & & & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
& x_j & \geq 0 & \text{for } j = 0, 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Merk: dette er også et LP problem. Kaller det LP-I.

Om Fase I problemet:

- samme variable som før, men med en ekstra variabel x_0
- den gamle objektivfunksjonen er fjernet og erstattet av $-x_0$. Vi skal *maksimere* $-x_0$. Dette er ekvivalent med å *minimere* x_0. Hvorfor?
- begrensningene er "nesten som før" og er nå

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i + x_0$$

Tolkning av Fase I problemet:

Fase I problemet avklarer om det opprinnelige problemet har noen tillatt løsning (som ikke uten videre er opplagt). Og hvis svaret er "ja" finner vi også en tillatt løsning. Mer om dette:

- tenk på x_0 som et tillegg til alle høyresidene b_i.
- Hvis vi klarer å finne en tillatt løsning av LP-I der dette tillegget er 0 ($x_0 = 0$), så har vi også at

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i + x_0 = b_i$$

Initialisering, eksempel

LP problem (med minst en negative b_i):

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{maksimer} & -2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\
 & & & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2 \geq 0 \ .}
\end{array}$$

Dette gir Fase I problemet:

$$\begin{array}{lrcrrcr}
\text{maksimer} & & & & -x_0 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & \\
 & -x_1 & + & x_2 & -x_0 & \leq & -1 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & -x_0 & \leq & -2 \\
 & & & x_2 & -x_0 & \leq & 1 \\
 & & & \multicolumn{4}{l}{x_0, x_1, x_2 \geq 0 \ .}
\end{array}$$

Dette gir første basisliste. Som er ikke-tillatt!!? (Hvorfor?)

$$\begin{array}{rlcccccccc}
\xi & = & & & & & & - & x_0 \\
\hline
w_1 & = -1 & + & x_1 & - & x_2 & + & x_0 \\
w_2 & = -2 & + & x_1 & + & 2x_2 & + & x_0 \\
w_3 & = 1 & & & - & x_2 & + & x_0
\end{array}$$

Kan konverteres til tillatt basisliste ved en pivotering! Vi lar x_0 gå inn i basis (tolkning: trenger et tillegg til høyresiden) og lar den variabelen som er mest negativ forlate basis, altså w_2 her.
Resultat:

$$\begin{array}{rlccccccc}
\xi & = -2 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & w_2 \\
\hline
w_1 & = 1 & & & - & 3x_2 & + & w_2 \\
x_0 & = 2 & - & x_1 & - & 2x_2 & + & w_2 \\
w_3 & = 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & + & w_2
\end{array}$$

Dette er en tillatt basisliste, og tilhørende basisløsningen er

$$w_1 = 1, x_0 = 2, w_3 = 3 \quad \text{og de øvrige variable er null.}$$

Hva nå? Siden vi har en tillatt basisliste (dvs. basisliste med tillatt basisløsning) går vi videre med simpleksalgoritmen. Altså: pivoterer inntil vi har funnet optimal løsning. (Foretar avrunding for bedre lesbarhet).

1. iterasjon: x_2 inn i basis og w_1 ut, som gir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & -1.33 & + & x_1 & - & 0.67w_1 & - & 0.33w_2 \\
\hline
x_2 & = & 0.33 & & & - & 0.33w_1 & + & 0.33w_2 \\
x_0 & = & 1.33 & - & x_1 & + & 0.67w_1 & + & 0.33w_2 \\
w_3 & = & 2 & - & x_1 & + & w_1 & &
\end{array}$$

2. iterasjon: x_1 inn i basis og x_0 ut, som gir:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & 0 & - & x_0 & & & & \\
\hline
x_2 & = & 0.33 & & & - & 0.33w_1 & + & 0.33w_2 \\
x_1 & = & 1.33 & - & x_0 & + & 0.67w_1 & + & 0.33w_2 \\
w_3 & = & 0.67 & + & x_0 & + & 0.33w_1 & - & 0.33w_2
\end{array}
$$

Ser at denne basislisten er optimal! Har dermed løst Fase I problemet.

Siden optimal verdi er 0, finnes en tillatt løsning i opprinnelig LP problem. Nemlig: $x_1 = 4/3, x_2 = 1/3$. Sjekk dette!

Videre kan vi skrive opp en tillatt basisliste for det opprinnelige LP problemet ved

- å fjerne x_0 fra optimal basisliste i Fase I, og
- gjeninnføre den opprinnelige objektivfunksjon:

$$\begin{array}{ccrcrcr} \eta & = & -3 & - & w_1 & - & w_2 \\ \hline x_2 & = & 0.33 & - & 0.33w_1 & + & 0.33w_2 \\ x_1 & = & 1.33 & + & 0.67w_1 & + & 0.33w_2 \\ w_3 & = & 0.67 & + & 0.33w_1 & - & 0.33w_2 \end{array}$$

Nå har vi en tillatt basisliste (og tillatt basisløsning) og løser dette LP problemet ved simpleksalgoritmen. Kaller dette Fase II problemet.
Tilfeldigvis er denne basislisten optimal, så ingen pivotering var nødvendig. Normalt kreves flere pivoteringer i Fase II problemet.

Initialisering

Oppsummering:

- metoden i eksempelet *kan brukes generelt*
- Fase I: løser Fase I problemet for å finne, om mulig, en initiell tillatt løsning. I så fall får vi også en tillatt startbasisliste for neste oppgave.
- Fase II: løser Fase II problemet med løsningen fra Fase I som startløsning. Finner ved simpleksalgoritmen en optimal løsning av det opprinnelige LP problemet, evt. ubegrenset løsning.

Ubegrenset løsning

Neste tema: noen problemer har ubegrenset verdi!

Ser nærmere på pivotering. Minner om:

- en indeks k flyttes fra N til B (x_k er inngående variabel; ny basisvariabel fordi den øker η),
- en annen indeks l flyttes fra B til N (x_l er utgående variabel; variabel går ut av basis fordi den blir 0) og
- vi finner en ny tillatt basisliste fra den gamle vha. radoperasjoner

Mulig problem: det kan tenkes at når inngående variabel x_k økes, så vil ingen av basisvariablene bli null! Eksempel:

$$\begin{array}{ccccccc} \eta & = & 2 & + & 3x_4 & - & x_5 \\ \hline x_1 & = & 1 & + & x_4 & + & x_5 \\ x_2 & = & 2 & + & 5x_4 & + & x_5 \\ x_3 & = & 0 & & & - & x_5 \end{array}$$

Vi ønsker å ta x_4 inn i basis, og ser at ingen basisvariabel da blir null.

Konklusjon: kan øke x_4 vilkårlig mye og får vilkårlig stor verdi på objektivfunksjonen η. Sier at problemet er ubegrenset (og optimal "verdi" er ∞). Videre ser vi at hvis vi går langs strålen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 0, 0, 0) + (1, 5, 0, 1, 0) \cdot x_4$$

der $x_4 \geq 0$, vil $\eta \to \infty$.

Hva kan vi si generelt?

La x_k være variabelen vi ønsker å ta inn i basis. Hvis vi har en basisliste der alle koeffisientene foran x_k er ikkenegative, så skjer det samme som over.
Altså:

- ubegrenset verdi, og
- finner en stråle der η går mot uendelig.

Geometri

Geometri for LP i to variable:

- tillatt mengde: polyeder P
- tillatt basisløsning: hjørne
- pivotering: gå langs kant mellom to nabohjørner
- nivåmengden $\{x : c^T x = \alpha\}$: linje normal på c, forskyves inntil den tangerer P
- tilsvarende for flere variable: se konveksitet senere

Avsluttende kommentarer

Når vi løser et LP problem har vi følgende muligheter:

1. problemet har ingen tillatt løsning. Dette avklares i så fall i Fase I.
2. problemet har tillatt løsning, men ingen optimal løsning fordi problemet er ubegrenset.
3. problemet har tillatt og løsning, og vi ender opp med en optimal løsning

Og dette er faktiske alle muligheter

Men begrunnelsen er ikke triviell. Vi må vise at simpleksalgoritmen terminerer.

- *Har nemlig hittil antatt at alle basisvariable er positive, men ikke diskutert hva som skjer hvis noen av dem blir null!*
- Skal se på disse spørsmålene i Leksjon 3!