LP. Leksjon 3. Kapittel 3: degenerasjon.

- degenerasjon
- eksempel på sirkling
- den leksikografiske metoden
- andre pivoteringsregler
- fundamentaleoremet i LP

Repetisjon

- simpleksalgoritmen: sekvens av pivoteringer med tillatt initiell basisliste (tillatt basisløsning)
- simpleksmetoden: 2 ganger simpleksalgoritmen: Fase I og Fase II
- Fase I: løser Fase I problemet for å finne, om mulig, en initiell tillatt løsning. I så fall får vi også en tillatt initiell basisliste for neste oppgave.
- Fase II: løser Fase II problemet med løsningen fra Fase I som startløsning. Finner ved simpleksalgoritmen en optimal løsning av det opprinnelige LP problemet, evt. ...
- ubegrenset problem: ingen basisvariabel blir null, og finner da en stråle der η går mot uendelig

Degenerasjon

Betrakt LP problemet:

$$\begin{array}{lrll} \text{maksimer} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{forutsatt at} & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Ved starten av en pivotering har vi en basisliste:

$$\begin{array}{rcll} \eta & = & \bar{\eta} + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j & \\ x_i & = & \bar{b}_i - \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j & \text{for } i \in B. \end{array}$$

Vi kaller basislisten degenerert dersom $\bar{b}_i = 0$ for minst en i. Vi har da en degenerert basisløsning.

Merk at vi alltid har $\bar{b}_i \geq 0$. *Hvorfor?*

Jo, det er slik vi starter og dette bevares under hver pivotering fordi vi ikke øker inngående variable "for mye".

Hittil har vi antatt at $\bar{b}_i > 0$. Konsekvens: vi har alltid kunnet øke inngående basisvariable til en *positiv verdi*.

Degenerasjon og problemer:

- degenerasjon behøver ikke gi problemer
- degenerasjon kan gi problemer.

F.eks. kan en basisliste være degenerert basisliste være optimal

$$
\begin{array}{ccccccc}
\eta & = & 2 & - & 3x_4 & - & x_5 \\
\hline
x_1 & = & 1 & + & x_4 & + & x_5 \\
x_2 & = & 2 & + & 5x_4 & + & x_5 \\
x_3 & = & 0 & & & - & x_5
\end{array}
$$

Helt uproblematisk. Tilsvarende ved ubegrenset løsning.

Men: hvis en degenerert basisliste gir en degenerert pivotering, kan vi få problemer. Dette betyr at inngående variabel ikke kan økes $\theta = 0$). Eksempel:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\eta & = & 2 & + & 3x_4 & - & x_5 \\
\hline
x_1 & = & 0 & - & x_4 & + & x_5 \\
x_2 & = & 2 & + & 5x_4 & + & x_5 \\
x_3 & = & 0 & & & - & x_5
\end{array}
$$

- Vi ønsker å øke x_4, men ser at dette ikke er mulig fordi da blir x_1 negativ.
- Vi kan likevel gjøre denne degenererte pivoteringen ved å ta x_4 inn og x_1 ut av basis. Men *løsningen* x er den samme og derfor vil ikke η endre seg.
- Altså: vi har gjort en pivotering, men står likevel stille (i $\mathbb{R}^n$).

Gir degenererte pivoteringer problemer?

Ikke nødvendigvis. Men hvis vi får en sekvens av bare degenererte pivoteringer der vi f.eks. etter 10 slike pivoteringer kommer tilbake til samme basis, *da har vi et problem*! For da vil denne sekvensen på 10 pivoteringer gjentas i det uendelige, og algoritmen vil da ikke finne optimal løsning. Dette fenomenet kalles sirkling.

Verdt å vite om degenerasjon og sirkling:

- sirkling er knapt noe problem i praksis. For LP problemer i praktiske situasjoner er knapt noen forekomst av sirkling rapportert.
- degenerasjon forkommer ofte i praktiske LP problemer. Dette er et problem fordi av og til er mange, kanskje de fleste, pivoteringene degenererte. Men dette er ikke nødvendigvis lett å unngå (med simpleksalgoritmen).
- sirkling kan forekomme. Første eksempel på et LP problem med sirkling ble funnet i 1953 av Alan Hoffman.

Sirkling, eksempel

Bruker pivoteringsregel: velg inngående variable med $\bar{c}_j$ størst mulig, og utgående variabel med lavest indeks.

Basisliste 0:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\eta & = 0 & + & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 \\
\hline
w_1 & = 0 & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
w_2 & = 0 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
w_3 & = 1 & - & x_1 & & & & & &
\end{array}
$$

Basisliste 1:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\eta & = 0 & - & 20w_1 & + & 53x_2 & + & 41x_3 & - & 204x_4 \\
\hline
x_1 & = 0 & - & 2w_1 & + & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 \\
w_2 & = 0 & + & w_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 \\
w_3 & = 1 & + & 2w_1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4
\end{array}
$$

Basisliste 2:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
\eta & = 0 & - & 6.75w_1 & - & 13.25w_2 & + & 14.5x_3 & - & 98x_4 \\
\hline
x_1 & = 0 & + & 0.75w_1 & - & 2.75w_2 & - & 0.5x_3 & + & 4x_4 \\
x_2 & = 0 & + & 0.25w_1 & - & 0.254w_2 & - & 0.5x_3 & + & 2x_4 \\
w_3 & = 1 & - & 0.75w_1 & - & 13.25w_2 & + & 0.5x_3 & - & 4x_4
\end{array}$$

Basisliste 3:

$$\begin{array}{lcrcrcrcr}
\eta & = 0 & + & 15w_1 & - & 93w_2 & - & 29x_1 & + & 18x_4 \\
\hline
x_3 & = 0 & + & 1.5w_1 & - & 5.5w_2 & - & 2x_1 & + & 8x_4 \\
x_2 & = 0 & - & 0.5w_1 & + & 2.5w_2 & + & x_1 & - & 2x_4 \\
w_3 & = 1 & & & & & - & x_1 & &
\end{array}$$

Basisliste 4:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrr}
\eta & = 0 & + & 10.5w_1 & - & 70.5w_2 & - & 20x_1 & - & 9x_2 \\
\hline
x_3 & = 0 & - & 0.5w_1 & + & 4.5w_2 & + & 2x_1 & - & 4x_2 \\
x_4 & = 0 & - & 0.25w_1 & + & 1.25w_2 & + & 0.5x_1 & - & 0.5x_2 \\
w_3 & = 1 & & & & & - & x_1 & &
\end{array}
$$

Basisliste 5:

$$
\begin{array}{llrrrrrrrr}
\eta & = 0 & - & 21x_3 & + & 24w_2 & + & 22x_1 & - & 93x_2 \\
\hline
w_1 & = 0 & - & 2x_3 & + & 9w_2 & + & 4x_1 & - & 8x_2 \\
x_4 & = 0 & + & 0.5x_3 & - & w_2 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 \\
w_3 & = 1 & & & & & - & x_1 & &
\end{array}
$$

Basisliste 6:

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\eta & = 0 & + & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 \\
\hline
w_1 & = 0 & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
w_2 & = 0 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
w_3 & = 1 & - & x_1 & & & & & &
\end{array}
$$

Vi ser at basisliste 6 er den samme som basisliste 0. Så vi får sirkling!

Sirkling er derfor et (teoretisk) problem. Men sirkling viser seg å være det eneste problemet vi kan få, fordi...

Et viktig teorem

Teorem 3.1. *Hvis simpleksmetoden ikke terminerer, så må den sirkle.*

Bevis: Hvor mange basislister finnes? En øvre skranke er

$$\binom{m+n}{n} = (m+n)!/(n!m!)$$

som er antall måter å velge m elementer (basisvariablene) blant $n+m$ elementer (alle variablene). (Mange av disse valgene vil faktisk ikke gi basislister.) Hvis simpleksmetoden ikke terminerer, vil en av disse basislistene forekomme to ganger, og vi vil få sirkling. □

Den leksikografiske metoden

Den leksikografiske metoden (perturbasjonsmetoden) er en metode for å unngå sirkling.

- Idé: perturbere høyresidene slik at man unngår degenerasjon!
- Hvis perturbasjonene er små nok, vil problemet endres så lite at man stadig finner en korrekt optimal løsning.

Eksempel (med degenerert basisløsning):

$$
\begin{array}{lllll}
\eta & = 4 & +2x_1 & - & x_2 \\
\hline
w_1 & = 0.5 & & - & x_2 \\
w_2 & = 0 & -2x_1 & + & 4x_2 \\
w_3 & = 0 & x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

Innfører nå symboler (uspesifiserte små tall) der

$$0 < \epsilon_3 \ll \epsilon_2 \ll \epsilon_1 \ll \text{alle data}$$

og den perturberte basislisten

$$
\begin{array}{llllrcr}
\eta & = 4 & & & +2x_1 & - & x_2 \\
\hline
w_1 & = 0.5 & +\epsilon_1 & & & - & x_2 \\
w_2 & = 0 & & +\epsilon_2 & -2x_1 & + & 4x_2 \\
w_3 & = 0 & & +\epsilon_3 & +x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

Ikke degenerert! Pivoterer: x_1 inn, og w_2 ut.

Fortsettelse:

$$
\begin{array}{lllllll}
\eta & = 4 & & +\epsilon_2 & & +2w_2 & + \quad 3x_2 \\
\hline
w_1 & = 0.5 & +\epsilon_1 & & & & - \quad\;\; x_2 \\
x_1 & = & & 0.5\epsilon_2 & & -0.5w_2 & + \quad 2x_2 \\
w_3 & = & & 0.5\epsilon_2 & +\epsilon_3 & -0.5w_2 & - \quad\;\; x_2
\end{array}
$$

og ...

$$
\begin{array}{lllllll}
\eta & = 4 & & +2.5\epsilon_2 & +3\epsilon_3 & -2.5w_2 & -3w_3 \\
\hline
w_1 & = 0.5 & +\epsilon_1 & -0.5\epsilon_2 & -\epsilon_3 & +0.5w_2 & +w_3 \\
x_1 & = & & 1.5\epsilon_2 & +2\epsilon_3 & -1.5w_2 & -2w_3 \\
x_2 & = & & 0.5\epsilon_2 & +\epsilon_3 & -0.5w_2 & -w_3
\end{array}
$$

Denne basislisten er optimal.

Dropper nå perturbasjonene og får

$$\begin{array}{lllll}
\eta & = 4 & -2.5w_2 & -3w_3 \\
\hline
w_1 & = 0.5 & +0.5w_2 & +w_3 \\
x_1 & = 0 & -1.5w_2 & -2w_3 \\
x_2 & = 0 & -0.5w_2 & -w_3
\end{array}$$

som gir optimal løsning av det opprinnelige LP problemet!

- Perturbasjonene vil bare påvirke konstantleddene, ikke koeffisientene til variablene. (Hvorfor?)
- Derfor påvirkes ikke valg av inngående variabel. Men utgående variabel blir entydig bestemt hver gang (se under).

Nok et viktig teorem!

Teorem 3.2. *Simpleksmetoden vil alltid terminere dersom utgående variabel velges ut fra den leksikografiske regelen.*

Bevis: Holder å vise at vi aldri får degenerert basisliste. Ser på "konstantdelen" som innledningsvis er:

$$\begin{matrix} \epsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_m \end{matrix}$$

eller $I\epsilon$ på matriseform (der I er identitetsmatrisen, og ϵ er kolonnevektoren med komponenter ϵ_i-ene). Ved pivoteringene adderes multiple av en rad til andre rader, og dette svarer til å multiplisere med bestemte ikkesingulære (invertible) matriser fra venstre.

Ved starten på en vilkårlig pivotering er konstantdelen

$$\begin{matrix} r_{11}\epsilon_1 & \cdots & r_{im}\epsilon_m \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1}\epsilon_1 & \cdots & r_{mm}\epsilon_m \end{matrix}$$

dvs på matriseform $R\epsilon$. Siden R er ikkesingulær ville hver rad inneholde en ikkenull. Dermed er ingen rad degenerert! $\square$

Bland' regel

I 1977 publiserte R. Bland en ny og enkel pivoteringsregel for simpleksmetoden. Betrakt et LP problem med variable $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (der noen er slakkvariable; det spiller ingen rolle her).

Bland's regel:

- Hvis det er flere valgmuligheter for *inngående* variabel, velg den med lavest indeks.
- Hvis det er flere valgmuligheter for *utgående variabel*, velg den med lavest indeks.

F.eks. hvis vi i en iterasjon har at $\bar{c}_3, \bar{c}_5, \bar{c}_9$ er positive, mens $\bar{c}_j \leq 0$ for $j \neq 3, 5, 9$, sier Bland's regel at vi skal velge x_3 som ny basisvariabel.
Merk: Bland's regel skal anvendes *både på inngående og utgående variabel*. Dette er i motsetning til den leksikografiske metoden som bare omhandler utgående variabel.

Teorem 3.3. *Simpleksmetoden vil alltid terminere dersom både inngående og utgående variabel velges ut fra Bland's regel.*

For bevis, se boka (nokså kryptisk, men slik er alle bevis for dette resultatet, dessverre).

Litt om pivoteringsregler:

Bland's regel:

- Styrke: hindrer sirkling, lett å forstå, og lett å programmere.
- Svakhet: man kan få liten økning på objektivfunksjonen i hver pivotering, og dermed mange pivoteringer og lang regnetid.

Dantzig's regel=største koeffisient regel (1951):

- Velg inngående variable med $\bar{c}_j$ størst mulig, og utgående variabel med lavest indeks.
- Denne regelen er mye brukt i praksis, og fungerer bra (lav regnetid).
- Men den kan, i teorien, gi sirkling.

Det finnes mange andre pivoteringsregler, bla.:

Bratteste kant regelen:

- Velg inngående variabel slik at vinkelen mellom retningen $x^1 - x^0$ og c er minst mulig. (Hvorfor?)
- Her er x^0 og x^1 hhv. gammel og ny basisløsning.
- Denne regelen viser seg ofte å fungere best i praksis (men gir ingen garanti mot sirkling).

Beste forbedringsregelen:

- Velg inngående variabel slik at forbedringen av objektivfunksjonen blir størst mulig.
- Kan virke smart, men viser seg å kreve for lang regnetid i hver iterasjon.

Fundamentalteoremet i LP

Det er to teoremer om LP som er viktigere enn alle andre, nemlig

- Fundamentalteoremet i LP, og
- Dualitetsteoremet.

Vi er klar for det første! (Og dualitet kommer senere.)

Teorem 3.3. *For ethvert LP problem gjelder:*

- *Hvis det ikke finnes optimal løsning, så er problemet enten ikke tillatt eller ubegrenset.*
- *Hvis problemet er tillatt, så fins en tillatt basisløsning.*
- *Hvis problemet har en optimal løsning, så fins også en optimal basisløsning.*

Bevis: Fase I avgjør om problemet er tillatt og finner, hvis det er tillatt, en tillatt basisløsning. Fase II avklarer om problemet er ubegrenset eller om det fins en optimal løsning. I sistnevnte tilfelle finner vi en optimal basisløsning. Metoden terminerer pga av at vi har vist at antisirklingsregler fins. $\square$

Geometri og degenerasjon

- eksempel: toppen av en egyptisk pyramide!
- slakkvariable "måler" avstand til hyperplan
- degenerasjon type 1: redundante ulikheter
- degenerasjon type 2: $P \subset \mathbb{R}^n$, et hjørne ligger på mer enn n fasetter
- degenerert pivotering: representerer samme hjørne x på ulike måter (kan være mange utvalg av n lineært uavhengige hyperplan gjennom x)