LP. Leksjon 5

Kapittel 5: dualitetsteori

- motivasjon
- det duale problemet
- svak og sterk dualitet
- det duale til LP problemer på andre former

Motivasjon

Til ethvert LP problem (P) er det knyttet et annet “speilvendt” LP problem (D). Her kalles (D) det duale problemet til (P), og (P) kalles det primale problemet. Det viser seg at det duale problemet til (D) er (P)! (To ganger speilvending!)

LP problemer opptrer altså i par: et primalt og et dualt problem.

Dualitetsteori er nyttig fordi:

- det duale problemet kan brukes til å raskt gi skranker på optimal verdi i et LP problem
- istedet for å løse et LP problem (P) kan man løse det duale (D). Man får da en løsning av (P) “på kjøpet”! Dette kan være mer effektivt.

Det duale problemet

Betrakt LP problemet (P), det primale problemet, gitt ved

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \text{f.a.} & \\
& & \begin{array}{rlr} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ x_j & \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n. \end{array}
\end{array}
$$

Vi definerer det duale problemet (D) slik:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\
& \text{f.a.} & \\
& & \begin{array}{rlr} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} & \geq c_j & \text{for } j = 1, \ldots, n \\ y_i & \geq 0 & \text{for } i = 1, \ldots, m. \end{array}
\end{array}
$$

Huskeregel:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & x_1 & \dots & x_n & \\
\hline
y_1 & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_m & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \\
\hline
 & c_1 & \dots & c_n &
\end{array}
$$

La nå $A = [a_{ij}]$ være koeffisientmatrisen.

Observer:

- (D): variablene er knyttet til radene i A, mens begrensningene er knyttet til kolonnene i A
- (P): omvendt! Altså: variablene er knyttet til kolonnene i A, mens begrensningene er knyttet til radene i A
- b_i-ene utgjør høyresiden i (P), men inngår i objektivfunksjonen i (D)
- c_j-ene inngår i objektivfunksjonen i (P), men utgjør høyresiden i (D)

- begrensningene i (D) er $\geq$
- (D) er også et LP problem. Vi skal snart skrive det om på den "vanlige formen".

Vi gir først et viktig resultat som nettopp er motivasjonen for dualitet: enhver tillatte løsning i et LP problem gir opphav til en skranke på den optimale verdien i det duale.

Teorem 5.1: (Svak dualitet) *Hvis* $(x_1, \ldots, x_n)$ *er tillatt i (P) og* $(y_1, \ldots, y_m)$ *er tillatt i (D) har vi*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

Bevis: Fra begrensningene i (P) og (D) får vi

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}) x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i .$$

$\square$

Eksempel:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(P)} & \text{maksimer} & 5x_1 + & 6x_2 + & 8x_3 \\
& \text{forutsatt at} & & & \\
& & x_1 + & 2x_2 + & 3x_3 & \leq 5 \\
& & 4x_1 + & 5x_2 + & 6x_3 & \leq 11 \\
& & & x_1, x_2, x_3 \geq 0. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{(D)} & \text{minimer} & 5y_1 + & 11y_2 & \\
& \text{forutsatt at} & & & \\
& & y_1 + & 4y_2 & \geq 5 \\
& & 2y_1 + & 5y_2 & \geq 6 \\
& & 3y_1 + & 6y_2 & \geq 8 \\
& & & y_1, y_2 \geq 0. &
\end{array}
$$

Ser nå at f.eks. $(y_1, y_2) = (1, 1)$ er en tillatt løsning i (D), og tilhørende verdi på objektivfunksjonen i (D) er $5 + 11 = 16$. Altså kan optimal verdi i (P) høyst være 16. På den annen side er $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 5/3)$ tillatt i (P) med tilhørende verdi $\eta = 40/3 \approx 13.33$. Så, optimal verdi η^* i (P) må ligge mellom 13.33 og 16.

Hva med $x^* = (x_1, x_2, x_3) = (1/2, 0, 3/2)$ og $y^* = (y_1, y_2) = (1/3, 7/6)$? Har at $\sum_{j=1}^{3} c_j x_j^* = 29/2$ og $\sum_{i=1}^{2} b_i y_i^* = 29/2$. Men da følger det av svak dualitet at x^* er optimal i (P) og at y^* er optimal i (D)!

Svak dualitet gir et prinsipp for å vise optimalitet, eller evt. "nesten-optimalitet".

Tolkning av (D): enhver tillatt x i (P) oppfyller $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ og derfor også en ikkenegativ lineærkombinasjon av disse:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m y_i(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

Her er y_i en ikkenegativ multiplikator for ulikhet nr. i.

Hvis vi dessuten velger y_i-ene slik at $\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j$ vil venstre side i $(*)$ være $\geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$. Så da har vi fått en øvre skranke den optimale verdien η^* is (P), nemlig $\sum_{i=1}^m y_i b_i$. Vi vil gjerne ha en best mulig skranke, dvs. lavest mulig, som gir problemet

$$\min\{\sum_{i=1}^m y_i b_i : \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \text{ for alle } j, \;\; y_i \geq 0 \text{ for alle } i\}$$

altså det duale problemet!

Sterk dualitet

Naturlig spørsmål: Svak dualitet medfører at optimal verdi i (P) $\leq$ optimal verdi i (D). Kan vi her ha *ekte ulikhet?* Svaret er bl.a. viktig for testing av optimalitet. Svaret er: *nei*, unntatt i svært spesielle situasjoner. Vi har nemlig:

Teorem 5.2: (Sterk dualitet) *Hvis (P) har en optimal løsning $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, så har (D) en optimal løsning $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ slik at*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

□

Konsekvens: (P) og (D) har samme optimale verdi når (P) har optimal løsning.

Skal senere drøfte situasjonen der (P) evt. (D) er ubegrenset, eller hvis hverken (P) eller (D) er tillatt (dette kan skje, men ikke for "interessante problemer").

Sterk dualitet kan bevises kort via simpleksalgoritmen, spesielt i matrisenotasjon. Men for å øke forståelsen skal vi holde oss til komponentnotasjon og studere nærmere hva som skjer i (P) og (D) under en simpleks pivotering.

Pivotering, primal og dual

Eksempel: $m = 2$, $n = 3$. Innfører slakkvariable z_j i (D) og skriver også (D) som maksimeringsproblem. På basislisteform:

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 0 & + & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\
\hline
w_1 & = & 1 & - & x_1 & - & 4x_2 & & \\
w_2 & = & 3 & - & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{D}) \quad \begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & 0 & - & y_1 & - & 3y_2 \\
\hline
z_1 & = & -4 & + & y_1 & + & 3y_2 \\
z_2 & = & -1 & + & 4y_1 & - & y_2 \\
z_3 & = & -3 & & & + & y_2
\end{array}
$$

Legg merke til " negativ-transponert egenskapen" på høyre side:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivoterer nå i (P): x_3 inn i basis og w_2 ut av basis. Gjør tilsvarende pivotering i (D): x_3 svarer til z_3 og w_2 svarer til y_2. Så, i (D) går y_2 inn i basis og z_3 ut av basis.

Merk: pivoteringen gjennomføres på vanlig måte (bytte rolle + radoperasjoner) selv om vi "tilfeldigvis" ikke har en tillatt basisløsning i (D). Resultat:

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 9 & - & 5x_1 & + & 4x_2 & - & 3w_2 \\
\hline
w_1 & = & 1 & - & x_1 & - & 4x_2 & & \\
x_3 & = & 3 & - & 3x_1 & + & x_2 & - & w_2
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{D}) \quad \begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -9 & - & y_1 & - & 3z_3 \\
\hline
z_1 & = & 5 & + & y_1 & + & 3z_3 \\
z_2 & = & -4 & + & 4y_1 & - & z_3 \\
y_2 & = & 3 & & & + & z_3
\end{array}
$$

Ser igjen at negativ-transponert egenskapen holder. Spesielt ser vi at verdien til den primale løsningen er lik verdien til den duale løsningen. Men den duale løsningen er ikke tillatt.

Ny pivotering: i (P): x_1 inn og w_1 ut. Tilsvarende pivotering i (D): y_1 inn og z_2 ut. Resultat:

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 10 & - & 6x_1 & - & w_1 & - & 3w_2 \\
\hline
x_2 & = & 0.25 & - & 0.25x_1 & - & 0.25w_1 & & \\
x_3 & = & 3.25 & - & 3.25x_1 & - & 0.25w_1 & - & w_2
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{D})\quad
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -10 & - & 0.25z_2 & - & 3.25z_3 \\
\hline
z_1 & = & 6 & + & 0.25z_2 & + & 3.25z_3 \\
y_1 & = & 1 & + & 0.25z_2 & + & 0.25z_3 \\
y_2 & = & 3 & & & + & z_3
\end{array}
$$

Ser nå at:

- negativ transponert egenskap holder stadig
- optimal løsning i (P), og derfor
- for første gang er den duale basisløsningen tillatt

Lemma PIV: (Pivotering i (P) og (D)) *Anta at hver pivotering utføres i både (P) og (D) slik at hvis x_j erstatter w_i i primal basis, så vil y_i erstatte z_j i dual basis. Da vil negativ-transponert egenskapen holde i hver iterasjon.* $\square$

Oppgave: vis Lemma PIV ved å sjekke følgende:

(P)

b	$\dots$	a	
$\vdots$		$\vdots$	
d	$\dots$	c	

$\overset{\text{pivot}}{\longrightarrow}$

$-b/a$	$\dots$	$1/a$	
$\vdots$		$\vdots$	
$d - bc/a$	$\dots$	c/a	

(D)

	$-b$	$\dots$	$-d$
	$\vdots$		$\vdots$
	$-a$	$\dots$	$-c$

$\overset{\text{pivot}}{\longrightarrow}$

	b/a	$\dots$	$-d + bc/a$
	$\vdots$		$\vdots$
	$-1/a$	$\dots$	$-c/a$

Bevis for sterk dualitet:

Fra Lemma PIV følger at i hver iterasjon k har vi en primal basisløsning x^k og en dual basisløsning y^k med samme verdi på de resp. objektivfunksjoner, dvs.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^k = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^k.$$

Den primale simpleksalgoritmen terminerer med en tillatt basisvariabel x^* og dette skjer når alle koeffisientene foran ikkebasisvariablene i (P) er ikkepositive.

Men ved Lemma PIV betyr dette at den tilhørende duale basisløsning y^* er tillatt (basisvariablene er ikkenegative). Som ønsket er da $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$. □

Komplementær slakk

Skal studere optimalitetsegenskapen i LP; den kalles komplementær slakk. Anta at $x = (x_1, \ldots, x_n)$ er en tillatt løsning i (P) og at $y = (y_1, \ldots, y_m)$ er en tillatt løsning i (D). (Om de er basisløsninger spiller ingen rolle nå.)

Spørsmål: hva må til for at x skal være optimal i (P) og y optimal i (D)?

Analyse: Siden (P) og (D) har samme optimale verdi (konsekvens av sterk dualitet) ser vi at: x og y er begge optimale (i hhv (P) og (D)) hvis og bare hvis

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Men, fra begrensningene får vi (som i beviset for svak dualitet)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij}) x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Så $(*)$ holder hvis og bare hvis

- $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j$ hvis $x_j > 0$, og
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ hvis $y_i > 0$.

Disse to kravene kalles komplementær slakk.

Vi har derfor vist følgende resultat.

Teorem 5.3: (Komplementær slakk) *Anta at $x = (x_1, \ldots, x_n)$ er en tillatt løsning i (P) og at $y = (y_1, \ldots, y_m)$ er en tillatt løsning i (D). La $(w_1, \ldots, w_m)$ være tilhørende primale slakkvariable, og $(z_1, \ldots, w_n)$ tilhørende duale slakkvariable.*
Da er x optimal i (P) og y optimal i (D) hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} x_j z_j &= 0 \quad \text{for } j = 1, \ldots, n, \\ w_i y_i &= 0 \quad \text{for } i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

□

Komplementær slakk sier derfor: hvis det er slakk i en ulikhet (slakkvariabelen er positiv) i et av problemene, så må den tilhørende duale variabelen være null.

Komplementær slakk er derfor en optimalitetsegenskap. Legg merke til at dette er ulineære likninger, f.eks.

$$x_j z_j = 0 \quad (j \leq n).$$

Dette er *ulineariteten i lineær optimering* !! Dette gjør LP vanskeligere å løse enn lineære likninger. Men likevel er denne ulineariteten relativt enkel, som kanskje forklarer at LP problemer kan løses så effektivt.

Forresten: i indrepunktsmetoder for LP brukes Newton's metode for å løse et modifisert likningsystem som består av de opprinnelige likningene fra (P) og (D) (der slakkvariable er innført), samt komplementær slakk).

"Skjema" for LP algoritmer.

Om algoritmer for LP.

Fra Teorem 5.3 ser vi at å løse et LP problem består i å oppfylle tre egenskaper samtidig

- 1. primal tillathet,
- 2. dual tillathet, og
- 3. komplementær slakk.

Man får ulike algoritmer ved å sørge for at to av disse egenskapene holder i hver iterasjon, mens man tilstreber at den tredje også holder; da er problemet løst.

- Algoritmen vi har studert oppfyller 1 og 3 og tilstreber 2; den kalles gjerne den primale simpleksalgoritmen.
- En annen mulighet er å oppfylle 1 og 2 og tilstrebe 2; dette gir såkalte primal-duale algoritmer. (Både simpleks og "ikke-simpleks" algoritmer).

Den duale simpleksalgoritmen:

- Oppfyller egenskapene 2 og 3, og tilstreber 1
- Brukes gjerne hvis det er lett å finne en dualt tillatt startløsning, for da slipper man Fase I problemet (i primal simpleks). Brukes ved "reoptimering": har løst et problem og vil løse et nytt problem der vi har føyd til f.eks. en ny begrensning
- Kan brukes for Fase 1: bare sett inn en annen objektiv funksjon slik at initiell basisløsning er dualt tillatt!!
- Brukes også ofte hvis et problem har flere begrensninger enn variable; dette reduserer antall pivoteringer og går raskere
- Svarer til å bruke primal simpleksalgoritme på det duale problemet, og dette kan utnyttes til å utføre algoritmen direkte på den primale basislisten. Bygger på at startløsningen er dualt tillatt (dvs. koeffisienter foran ikkebasisvariable er ikkepositive).
- Se seksjon 6.6 og 6.7 for eksempel og nærmere detaljer

Den duale simpleks algoritmen: eksempel

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 12 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
\hline
x_4 & = & -4 & + & 3x_1 & - & 11x_2 & + & x_3 \\
x_5 & = & 3 & - & x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3
\end{array}
$$

1. dual pivotering: x_4 ut og x_3 inn (fordi $+x_3$ og $1/1 < 4/3$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 8 & - & x_1 & - & 12x_2 & - & x_4 \\
\hline
x_3 & = & 4 & - & 3x_1 & + & 11x_2 & + & x_4 \\
x_5 & = & -5 & + & 5x_1 & - & 19x_2 & - & 2x_4
\end{array}
$$

2. dual pivotering: x_5 ut og x_1 inn (fordi $+x_1$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 7 & - & 0.2x_5 & - & 15.8x_2 & - & 1.4x_4 \\
\hline
x_3 & = & 1 & - & 0.6x_5 & - & 0.4x_2 & - & 0.2x_4 \\
x_1 & = & 1 & + & 0.2x_5 & + & 3.8x_2 & + & 0.4x_4
\end{array}
$$

Dualt tillatt, så fortsett med primal pivotering: ferdig med en gang!

Dualitet, andre former

Vår standard form på (P) og (D) er:

$$
\begin{array}{llrll}
\text{(P)} & \text{maksimer} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\
 & \text{forutsatt at} & & & \\
 & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\
 & & x_j & \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llrll}
\text{(D)} & \text{minimer} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & & \\
 & \text{forutsatt at} & & & \\
 & & \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} & \geq c_j & \text{for } j = 1, \ldots, m \\
 & & y_i & \geq 0 & \text{for } i = 1, \ldots, m.
\end{array}
$$

På matriseform:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(P)} & \max\{c^T x : Ax \leq b,\ x \geq O\} \\
\text{(D)} & \min\{b^T y : A^T y \geq c,\ y \geq O\}.
\end{array}
$$

Ofte møter man LP problemer på en annen form. Men: ethvert LP problemer kan skrives om til formen (P). Til dette trengs noen teknikker:

- hver likning skrives som to ulikheter
- $\min f = -\max(-f)$
- en fri variabel x erstattes av $x^+ - x^-$ der $x^+, x^- \geq 0$

Man kan så finne det duale problemet (siden det primale nå har "riktig" form) og skrive dette på enklest mulig form.

Det er viktig å øve seg i teknikkene for å

- skrive ethvert LP problem på formen (P), og
- finne det duale til ethvert LP problem.

Det anbefales å gjøre denne omskrivningen ved å representere problemene på matriseform.

Vi trenger da å kunne håndtere partisjonerte matriser (blokkmatriser), se seksjon om dette i lineær algebra boken (MAT1120). Spesielt trenger vi regneregelen for matrisemultiplikasjon:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \\ A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \end{bmatrix}$$

Dessuten om transponert av partisjonert matrise:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$$

Eksempel:

$$\max\{c^T x^1 + d^T x^2 : A^1 x^1 \geq b^1,\ A^2 x^1 + A^3 x^2 \leq b^2,\ x^1, x^2 \geq O\}$$

Her er variablene x^1 og x^2 (passende vektorer). Kan skrive dette på formen (P) foran:

$$\max\{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -A^1 & O \\ A^2 & A^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -b^1 \\ b^2 \end{bmatrix},\ x^1, x^2 \geq O\}$$

Dermed kan det duale bestemmes, og man kan til slutt se om dette evt. kan forenkles.

Dette og liknende eksempler taes på tavla. (F.eks. der en variabelvektor x er fri, dvs. ingen fortegnskrav, og erstattes av $x' - x''$ der $x', x'' \geq O$.)

Siste kommentarer om dette dvs. om sammenheng mellom det primale og det duale problemet:

- en likning i det ene problemet svarer til en fri variabel i det andre problemet,
- en ulikhet i det ene problemet svarer til en ikkenegativ variabel i det andre problemet.