LP. Leksjon 6: Kap. 6: simpleksmetoden i matriseform, og Seksjon 7.1: følsomhetsanalyse

- matrisenotasjon
- simpleksalgoritmen i matrisenotasjon
- eksempel
- negativ transponert egenskap: bevis
- følsomhetsanalyse (seksjon 7.1)

Matrisenotasjon

Basislisteform kontra matriseform:

- basislisteform best for å forstå simpleksalgoritmen og håndregning av mindre eksempler
- i større beregninger brukes simpleksalgoritmen i matriseform
- matriseform er mer effektiv. Bruker numerisk lineær algebra.
- sentrale spørsmål: (i) prising, (ii) rask oppdatering av basis, (iii) LU-faktorisering, (iv) utnytte sparsity

Vi vil nøye oss med å forklare algoritmen i matriseform, uten å gå inn på de numeriske spørsmålene.

Betrakt LP problemet på standard form

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{f.a.} & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i & \text{for } i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & \text{for } j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Konverterer til likninger ved å innføre slakkvariable

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \quad \text{for } i = 1, \ldots, m.$$

Matriseform:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{f.a.} & & & \\ & Ax & = & b, \\ & x & \geq & O \end{array}$$

der

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

Merk: A har full radrang, dvs. radene i A er lineært uavhengige.

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Dermed er objktivfunksjonen $c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Simpleksalgoritmen vil i hver iterasjon ha delt variablene inn i to grupper: basis- og ikkebasisvariable. Lar som vanlig B og N være indeksmengdene til hhv. basisvariable og ikkebasisvariable.

Vi lar A_B og A_N betegne submatrisene av A som svarer til kolonnene med indekser i hhv. B og N. Dermed har vi

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_B & A_N \end{array} \right]$$

Merk: her er $B = \{1, \ldots, m\}$, men dette er bare for å lette notasjonen. Generelt er jo basisindeksene spredt ut. Matematisk kan vi da tenke oss å permutere kolonner i A og elementer i x (tilsvarende) slik at vi får formen over.

Primal simpleksalgoritme

Splitter x og c tilsvarende

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}$$

Dermed blir

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = A_B\, x_B + A_N\, x_N, \\ c^T x &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N. \end{aligned}$$

Likningssystemet $Ax = b$ blir nå

$$A_B\, x_B + A_N\, x_N = b$$

Vi antar nå at A_B er ikkesingulær; A_B kalles da en basis i A. Kolonnene i A_B er da en basis for $\mathbb{R}^m$ (m lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^m$). Løser likningssystemet:

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \tag{1}$$

som altså uttrykker basisvariablene x_B ved ikkebasisvariablene x_N.

Merk: *Enhver* løsning av $Ax = b$ kan altså skrives på denne formen $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ der x_N velges passende og x_B blir bestemt entydig ut fra (1).

Vi eliminerer nå x_B fra objektivfunksjonen:

$$\begin{aligned} \eta &= c_B^T x_B + c_N^T x_N = \\ &= c_B^T(A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N) + c_N^T x_N = \\ &= c_B^T A_B^{-1} b - ((A_B^{-1}A_N)^T c_B - c_N)^T x_N. \end{aligned}$$

Altså får vi

$$
\begin{array}{rcccl}
\eta & = & c_B^T A_B^{-1} b & + & (c_N - (A_B^{-1} A_N)^T c_B)^T x_N \\
\hline
x_B & = & A_B^{-1} b & - & A_B^{-1} A_N x_N
\end{array}
$$

som er basislisteformen vi har brukt hittil. Her er

$$
\begin{aligned}
c_B^T A_B^{-1} b &= \bar{\eta} \\
(c_N - (A_B^{-1} A_N)^T c_B)^T &= [\bar{c}_j] \\
A_B^{-1} b &= [\bar{b}_i] \\
A_B^{-1} N &= [\bar{a}_{ij}].
\end{aligned}
$$

der vektorene på høyre side har komponeneter indeksert med $i \in B$ og $j \in N$.

Basisløsningen knyttet til basislisten (dvs. valget av basis B) er

$$x_N^* = O, \;\; x_B^* = A_B^{-1} b.$$

Skal se på det duale. Minner om korrespondansen

- primal var. x_j svarer til dual slakkvar. z_j
- primal slakkvar. w_i svarer til dual var. y_i

Sier at x_j og z_j er komplementære, og at w_i og y_i er komplementære. Komplementære variable har motsatt rolle i likningene: de er på motsatt side. Altså: en variabel er i basis hvis og bare hvis den komplementære variabelen ikke er i basis.

Eksempel:

$$
\text{(P)} \quad
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\eta & = & 0 & + & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\
\hline
w_1 & = & 1 & - & x_1 & - & 4x_2 & & \\
w_2 & = & 3 & - & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3
\end{array}
$$

$$
\text{(D)} \quad
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & 0 & - & y_1 & - & 3y_2 \\
\hline
z_1 & = & -4 & + & y_1 & + & 3y_2 \\
z_2 & = & -1 & + & 4y_1 & - & y_2 \\
z_3 & = & -3 & & & + & y_2
\end{array}
$$

Initielt er x_1 ikke i basis i (P), mens den komplementære variabelen z_1 er i basis i (D) osv. Pivoterer nå i (P) ved å ta x_3 inn i basis og w_2 ut av basis. Ved tilsvarende pivotering i (D): z_3 (komplementær til x_3) går ut av i basis og y_2 (komplementær til w_2) går inn i basis.

I hver pivotering i (P) bytter en basisvariabel og en ikkebasisvariabel rolle. Ved tilsvarende pivotering i (D) vil de komplementære variablene i (D) også bytte rolle, men motsatt vei.

Komplementære variable har dermed stadig motsatt rolle når det gjelder det å være i basis. På grunn av denne komplementariteten velger vi å ordne variablene i de to problemene slik:

$$
\begin{array}{lcl}
(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m) & \rightarrow & (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \\
(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m) & \rightarrow & (z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+m})
\end{array}
$$

Så da er x_j og z_j komplementære for $j = 1, \ldots, n + m$. Spesielt vil basisvariablene i (D) være z_N (ikke z_B!).

På grunn av negativ transponert egenskapen blir den duale basislisten (med basis B) gitt ved:

$$\begin{array}{rcrcr} -\xi & = & -c_B^T A_B^{-1} b & - & (A_B^{-1} b)^T z_B \\ \hline z_N & = & (A_B^{-1} A_N)^T c_B - c_N & + & (A_B^{-1} A_N)^T z_B. \end{array}$$

Den duale basisløsningen knyttet til basislisten er

$$z_B^* = O, \;\; z_N^* = (A_B^{-1} A_N)^T c_B - c_N.$$

Vi innfører nå

$$\eta^* = c_B^T A_B^{-1} b$$

som er verdien på objektivfunksjon η i (P) for basisløsningen knyttet til B.

Konklusjon: primal og dual basisliste for basis B blir nå

$$\begin{array}{rcrcr} \eta & = & \eta^* & - & (z_N^*)^T x_N \\ \hline x_B & = & x_B^* & - & A_B^{-1} A_N x_N \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{rcrcr} -\xi & = & -\eta^* & - & (x_B^*)^T z_B \\ \hline z_N & = & z_N^* & + & (A_B^{-1} A_N)^T z_B \end{array} \tag{3}$$

Legg merke til negativ transponert-egenskapen.

Simpleksalgoritmen (primal) i kortversjon:

- starter med en basis B slik at x_B^* er tillatt i (P)
- foretar deretter en sekvens av pivoteringerer.
- hver pivotering er å finne en nabobasis (som er lik foregående basis bortsett fra for en indeks) slik at η øker og dessuten bestemme tilhørende primal og dual basisløsning.

Simpleksalgoritmen i matriseform vil finne samme løsninger (i hver itersjon) som basislistevarianten. Forskjellen er bare at vi nå skal operere på matriser og vektorer. Bruker notasjonen fra basislisteformen over.

En iterasjon i simpleksalgoritmen:

Step 1. Test optimalitet. Hvis $z_N^* \geq 0$, stopp. Nåværende basisløsning er optimal.

Step 2. Velg inngående basisvariabel. Velg en indeks $j \in N$ der $z_j^* < 0$. Kaller x_j inngående basisvariabel.

Step 3. Beregn primal skrittretning. Lar nå $x_N = te_j$ der e_j er j'te enhetsvektor; dette angir endringen i (primale) ikkebasisvariable. De primale basisvariable blir da gitt ved (se (2))

$$x_B = x_B^* - A_B^{-1} A_N t e_j = x_B^* - t \cdot \Delta x_B \tag{4}$$

der skrittretningen er gitt ved

$$\Delta x_B = A_B^{-1} A_N e_j.$$

(Δx_B inneholder koordinatene til $j$te kolonne i A_N uttrykt i basis A_B.)

Step 4. Beregn primal skrittlengde. Vi velger t størst mulig slik at x_B stadig er ikkenegativ. Fra likning (4) får vi at den nye verdien på basisvariabelen x_i er

$$x_i = x_i^* - t \cdot \Delta_i.$$

Så hvis $\Delta_i \leq 0$ for alle i, er problemet (P) ubegrenset. Ellers er den maksimale t er gitt ved

$$t = \min\{x_i^*/\Delta_i : \Delta_i > 0\}. \tag{5}$$

Ut fra Step 3 og 4 kan vi beregne den nye primale løsningen (se Step 8).

Step 5. Velg utgående basisvariabel. Velg en indeks i der minimumet inntraff i (5), og la x_i være utgående basisvariabel.

Step 6. Beregn dual skrittretning. Det gjenstår å finne endringen i de duale variablene (vi trenger disse for å finne de nye koeffisientene i objektivfunksjonen i (P)). Dette blir bestemt av valget av i og j over. Siden x_i forlater basis i (P), vil den komplementære variabelen z_i gå inn i basis i (D), så den må økes fra null til en viss verdi s. De duale basisvariable blir da gitt ved (se (3))

$$z_N = z_N^* + (A_B^{-1}A_N)^T s e_i = z_N^* - s \cdot \Delta z_N \tag{6}$$

der skrittretningen er gitt ved

$$\Delta z_B = -(A_B^{-1}A_N)^T e_i.$$

Step 7. Beregn dual skrittlengde. Vi kan bestemme den duale skrittlengden s ut fra at z_j forlater basis (som skyldes at den komplementære variabelen x_j går inn i primal basis). Siden z_j blir null får vi fra (6) at

$$s = z_j^* / \Delta_j.$$

Step 8. Oppdater primal og dual løsning. Primal løsning oppdateres ved

$$x_j^* := t, \;\; x_B^* := x_B^* - t \cdot \Delta x_B$$

og dual løsning oppdateres ved

$$z_i^* := s, \;\; z_N^* := z_N^* - s \cdot \Delta z_N.$$

Step 9. Oppdater basis. Til slutt opdateres basis ved

$$B := (B \setminus \{i\}) \cup \{j\}.$$

Sluttkommentarer:

- eksempel: se seksjon 6.3 i Vanderbei's bok
- dual simpleks i matriseform: se seksjon 6.4
- oppsummering: se slide nr. 2.

Negativ transponert egenskap

Betrakt det primale LP problemet (P)

$$\max \quad c^T x \quad \text{f.a.} \quad Ax + w = b, \quad x, w \quad \geq O.$$

og det duale (D)

$$\min \quad b^T y \quad \text{f.a.} \quad A^T y - z = c, \quad y, z \quad \geq O.$$

Alternativt: (P) er

$$\max \quad \bar{c}^T \bar{x} \quad \text{f.a.} \quad \bar{A}\bar{x} = \bar{b}, \quad \bar{x} \geq O.$$

og det duale (D)

$$\min \quad \hat{b}^T \hat{y} \quad \text{f.a.} \quad \hat{A}^T \hat{y} = \hat{c}, \quad \hat{y} \geq O.$$

Her er

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc} A & I \end{array}\right], \;\; \bar{c} = \left[\begin{array}{c} c \\ O \end{array}\right], \;\; \bar{x} = \left[\begin{array}{c} x \\ w \end{array}\right],$$

og

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc} -I & A^T \end{array}\right], \;\; \hat{b} = \left[\begin{array}{c} O \\ b \end{array}\right], \;\; \hat{y} = \left[\begin{array}{c} z \\ y \end{array}\right],$$

Komplementaritet - primal og dual basis: kolonne j er i basis i $\bar{A}$ hvis og bare hvis kolonne j *ikke* er i basis i $\hat{A}$.

I starten er de m siste kolonnene i $\bar{A}$ i basis, og de n første kolonnene i $\hat{A}$ er i basis.

Etter noen pivoteringer er

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc} A & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{A}_N & \bar{A}_B \end{array}\right] P$$

for en permutasjonsmatrise P. Kolonnene i $\bar{A}$ er permutert. Siden tilsvarende pivoteringer foregår i det duale er

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -I & A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_B & \hat{A}_N \end{bmatrix} P$$

Men $P^{-1} = P^T$, så $PP^T = I$. Dermed blir

$$\bar{A}\hat{A}^T = \begin{bmatrix} \bar{A}_N & \bar{A}_B \end{bmatrix} PP^T \begin{bmatrix} \hat{A}_B^T \\ \hat{A}_N^T \end{bmatrix} = \bar{A}_N\hat{A}_B^T + \bar{A}_B\hat{A}_N^T$$

og dessuten har vi at

$$\bar{A}\hat{A}^T = \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I \\ A \end{bmatrix} = -A + A = O.$$

Altså:

$$\bar{A}_N\hat{A}_B^T + \bar{A}_B\hat{A}_N^T = O$$

Ved litt algebra får vi at

$$\bar{A}_B^{-1}\bar{A}_N = -(\hat{A}_B^{-1}\hat{A}_N)^T$$

Dette viser negativ transponert egenskapen.

Følsomhetsanalyse

Følsomhetsanalyse (seksjon 7.1): hva skjer med løsninger når parametre endres?

Ser på et slikt spørsmål for LP: gitt en optimal basis, hvor mye kan hver enkelt koeffisient i objektivfunksjonen endres uten at nåværende basisløsning blir ikkeoptimal?

Svaret finner vi ved dualitet!
Minner om at når A_B er optimal basis har vi

$$
\begin{aligned}
x_B^* &= A_B^{-1} b, \\
y_N^* &= (A_B^{-1} A_N)^T c_B - c_N, \\
\eta^* &= c_B^T A_B^{-1} b.
\end{aligned}
$$

Dermed: Anta at bare c endres (blant dataene). Da endres y_N^* men ikke x_B^*. Så hvis c ikke endres mer enn at den nye vektoren y_N^* er ikkenegativ, så er stadig x_B^* optimal!

Anta c endres til $c + t \cdot \Delta c$, der t er et tall og Δc en "endringsvektor" (ofte en enhetsvektor). Da endres y_N^* til $y_N^* + t \cdot \Delta y_N$ der

$$\Delta y_N = (A_B^{-1} A_N)^T \Delta c_B - \Delta c_N.$$

Derfor vil nåværende basis stadig være optimal (etter endringen i c) dersom

$$(*) \quad y_N^* + t \cdot \Delta y_N \geq O.$$

Følsomhetsanalysen koker da ned til å bestemme minste og største verdi på t slik at $(*)$ holder!!

Eksempel:

$$\begin{array}{lllll}
\max & 5x_1+ & 4x_2+ & 3x_3 & \\
\text{f.a.} & & & & \\
\text{(i)} & 2x_1+ & 3x_2+ & x_3 & \leq 5 \\
\text{(ii)} & 4x_1+ & x_2+ & 2x_3 & \leq 11 \\
\text{(iii)} & 3x_1+ & 4x_2+ & 2x_3 & \leq 8 \\
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Optimal basisliste, der $B = \{3, 1, 5\}$ og $N = \{4, 2, 6\}$

$$\begin{array}{llrrrrrr}
\eta & = 13 & - & x_4 & - & 3x_2 & - & x_6 \\
\hline
x_3 & = 1 & + & 3x_4 & + & x_2 & - & 2x_6 \\
x_1 & = 2 & - & 2x_4 & - & 2x_2 & + & x_6 \\
x_5 & = 1 & + & 2x_4 & + & 5x_2 & & \\
\end{array}$$

NB: pass på rekkefølgen av variablene i matriseberegningene! Vi ønsker å se på endring av koeffisienten 3 til x_3 i obj.funk.

La derfor $\Delta c_B = (1,0,0)^T$ og $\Delta c_N = (0,0,0)^T$. Matrisen $A_B^{-1}A_N$ finner vi fra optimal basisliste slik:

$$-A_B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{som gir}$$

$$\Delta y_N = (A_B^{-1}A_N)^T \Delta c_B - \Delta c_N =$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Derfor: B vil være optimal basis dersom

$$(*) \quad (y_N^* + t \cdot \Delta y_N)^T = (1,3,1) + t \cdot (-3,-1,2) \geq O$$

$$\text{d.v.s.} \quad 1 - 3t \geq 0,\ 3 - t \geq 0,\ 1 + 2t \geq 0.$$

Dette gir $-1/2 \leq t \leq 1/3$. Så koeffisienten til x_3 (som var 3) kan variere mellom $3 - 1/2 = 5/2$ og $3 + 1/3 = 10/3$.
Til slutt: legg merke til hva som skjer hvis vi bruker $\Delta c_B = O$!

Denne følsomhetsanalysen viser hvor viktig basislister er for å forstå lineær programmering!

Videre temaer er:

- litt spillteori
- konveksitet (geometriske sider ved LP), og
- nettverk strøm problemer.