# LP. Leksjon 7. Kapittel 13: Nettverk strøm problemer

Skal studere matematiske modeller for strøm i nettverk. Dette har anvendelser av typen

- fysiske nettverk: internet, vei, jernbane, fly, telekommunikasjon, datanettverk
- logiske nettverk: mange muligheter, f.eks. økonomiske investeringer, optimal allokering av jobber til datamaskiner

Merk: Ser på lineære algebraiske modeller, ikke ulineære modeller eller differensiallikninger.

Modellene vi skal se på blir spesialtilfelle av lineær programmering (LP).

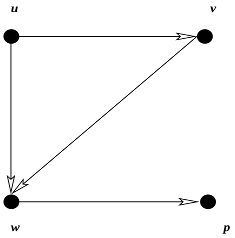
# 1. Nettverk strøm problemet

For å presentere modellene trenger vi å introdusere begrepet rettet graf.

- En rettet graf er et ordnet par $D = (V, E)$ der ....
- $V$ er en endelig mengde; elementene kalles noder (eller hjørner, punkter)
- $E$ er en endelig mengde som består av visse ordnede par av noder; disse elementene kalles kanter (eller linjer)

Vi kan representere enhver rettet graf ved en tegning i planet.

Eksempel:
$V = \{u, v, w, p\}$, $E = \{(u, v), (u, w), (v, w), (w, p)\}$.




Når $e = (u, v)$ sier vi at $u$ er startnode for kanten $e$, mens $v$ er sluttnode for $e$. Og $u$ og $v$ kalles endenodene til $e$.

Vi tenker oss strøm i en slik rettet graf ved at varer (materialer, data, olje, vann, ...) strømmer langs hver kant med retning slik kanten viser (fra startnode til sluttnode).

Vi antar at det i hver node er et visst tilførsel/behov for varer, behovet i node $v$ betegnes med $b_v$.

- $b_v > 0$: $v$ er tilførselsnode
- $b_v < 0$: $v$ er behovsnode
- $b_v = 0$: $v$ er transportnode

For at det skal finnes en strøm må vi ha at $\sum_{v \in V} b_v = 0$ siden nettverket ikke får eller sender varer til omverdenen.
La nå

- $x_{uv}$ være lik mengden av varer som strømmer langs kanten $(u, v)$ (altså fra $u$ til $v$ langs kanten).

Vi har vanligvis krav om at strømmen $x_{uv}$ i hver kant $(u, v)$ skal være ikkenegativ og ikke overstige en viss gitt kapasitet $a_{uv}$, altså

$$0 \leq x_{uv} \leq a_{uv} \quad ((u, v) \in E).$$

Vi antar at det er kostnader ved å sende varer og at denne kostnaden er lineær. For hver kant $(u, v)$ er det gitt en enhetskostnad $c_{uv}$ slik at kostnaden ved å sende $x_{uv}$ langs denne kanten blir $c_{uv}x_{uv}$. Den totale kostnaden blir da

$$\sum_{(u,v)\in E} c_{uv}x_{uv}.$$

Vi krever at strømmen $x = (x_{uv} : (u, v) \in E)$ oppfyller følgende likninger for strømbalanse

$$\sum_{u:(u,v)\in E} x_{uv} - \sum_{w:(v,w)\in E} x_{v,w} = -b_v \quad (v \in V).$$

Den første summen er lik den total innstrøm til node $v$ mens den andre summen er den totale utstrøm fra node $v$. Venstre side er dermed netto strøm inn til $v$ og denne skal være lik $-b_v$. At vi har minus foran $b_v$ skyldes definisjonen av $b_v$ foran. (Vi følger her Vanderbei's notasjon.)

Ved å multiplisere likningen for $v$ med $-1$ sier den at utstrøm minus innstrøm er lik $b_v$; dette kan være lettere å huske. Men formen over brukes videre (og påvirker det duale).

Vi har nå alle ingrediensene i modellen og kan skrive opp minimum kost nettverk strøm problemet (MKS):

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{(u,v)\in E} c_{uv} x_{uv} \\
\text{f.a.} & \\
& \sum_{u:(u,v)\in E} x_{uv} - \sum_{w:(v,w)\in E} x_{v,w} = -b_v \quad (v \in V) \\
& 0 \le x_{uv} \le a_{uv} \quad ((u,v) \in E).
\end{array}
$$

Dette er altså et LP problem. Men det er et LP problem med spesiell struktur!!

Vårt videre arbeid dreier seg om å forstå denne strukturen bedre. Det vil også lede til en effektiv metode for å løse problemet basert på en spesialisering av simpleksmetoden.

Vi skal forenkle framstillingen noe ved å anta at kapasitetene er uendelig store slik at vi kan se bort fra disse begrensningene. Det er imidlertid nokså greit å behandle det generelle tilfellet ved en mindre modifikasjon av metoden vi gir under (kort beskrevet senere).

Det er hensiktsmessig å skrive problemet på matriseform. La $n = |V|$ og $m = |E|$. Innfører kolonnevektorer $x$, $c$ og $b$ som svarer til strøm, (enhets)kostnader og tilførsel/behov. Så vi har her valgt en ordning (nummerering) av $V$ og $E$, og $x$ og $c$ har lengde $m$ mens $b$ har lengde $n$. Videre lar vi $O$ betegne nullvektoren (her av lengde $m$). (MKS) problemet er da på matriseform

$$
\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{f.a.} & \\
& Ax = -b \\
& x \geq O.
\end{array}
$$

Matrisen $A$ er en $n \times m$ matrise som er valgt slik at $Ax = -b$ representerer likningene for strømbalanse. Dette betyr at $A$ har en kolonne for hver kant $(u, v)$ og denne kolonnen har komponent lik 1 i rad $v$ (dvs. den raden som svarer til node $v$), $-1$ i rad $u$ og ellers er alle komponenter lik 0.

Hvis vi istedet ser på radene i $A$, så er det én rad for hver node $v$. Og rad $v$ inneholder 1 for hver kant som har $v$ som sluttnode og $-1$ for hver kant som har $v$ som startnode; resten av komponentene er 0. Vi ser derfor at $Ax = -b$ virkelig svarer til strømbalanse likningene.

Matrisen $A$ representerer altså grafen $D = (V, E)$ og kalles (node-kant) indikator matrisen til grafen.

## Dualitet.

Som vanlig når man har et LP problem er det en god idé å se på det duale problemet. Vi skal se at det har interessant struktur. Ved kjente teknikker kan man skrive (MKS) på standard formen $\max\{h^T x : Wx \geq q, x \geq O\}$ og finne det duale problemet som blir

$$\begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{f.a.} & \\ & A^T y + z = c \\ & z \geq O. \end{array}$$

Her har vektoren $y$ én komponent for hver node og vektoren $z$ har én komponent for hver kant.

På komponentform blir dette duale problemet (Dual-MKS) følgende

$$
\begin{aligned}
&\max && -\textstyle\sum_{v\in V} b_v y_v \\
&\text{f.a.} && \\
&&& y_v - y_u + z_{uv} = c_{uv} \quad ((u,v)\in E) \\
&&& z_{uv} \geq 0 \quad ((u,v)\in E).
\end{aligned}
$$

Altså:

- To typer duale variable.
- Nodevariabelen $y_v$ er knyttet til balanselikningen for node $v$.
- $y_v$ er fri, mens kantvariabelen $z_{uv}$ er ikkenegativ.
- Legg merke til at likningen bestemmer $z_{uv}$ entydig når $y$ er gitt.

Ved den siste observasjonen ser vi at (Dual-MKS) er ekvivalent med LP problemet

$$
-\min \sum_{v\in V} b_v y_v \ \text{ f.a. } \ y_v \leq y_u + c_{uv} \ \ ((u,v)\in E).
$$

- Her har vi eliminert $z_{uv}$-variablene (de inngår jo ikke i objektivfunksjonen og hver slik variabel er i bare én likning).
- Hvis $y$ oppfyller disse begrensningene, kalles $y$ et tillatt potensial. En slik $y$ er relatert til avstander i grafen: hvis vi tenker på $c_{uv}$ som lengden av kanten $(u, v)$, og lar $y_v$ være lik avstanden fra en viss node $r$ til node $v$ (definert som lengden av en korteste vei fra $r$ til $v$), så vil $y$ være et tillatt potensial. Mer om potensialer senere.

Vi skal nå trekke inn den generelle LP teorien og anvende den på (MKS). Vi vet

- optimal løsning har vi nettopp når vi har en tillatt primal løsning og en tillatt dual løsning og disse sammen oppfyller komplementær slakk kravene.

For (MKS) blir komplementær slakk kravene

$$x_{uv} z_{uv} = 0 \quad ((u, v) \in E).$$

Eller ekvivalent:

- hvis $y_v < y_u + c_{uv}$ (dvs. $z_{uv} > 0$), så må $x_{uv} = 0$.

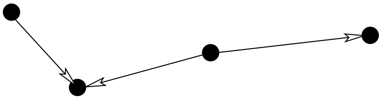
Dette spiller en sentral rolle for algoritmen som kommer etterhvert!

# 2. Spenntrær og basiser

(MKS) kan løses langt mer effektivt enn generelle LP problemer fordi basisene i problemet har spesiell struktur. Dette skyldes den spesielle formen på node-kant indikator matrisen som jo er koeffisientmatrisen her. Skal se nærmere på dette.

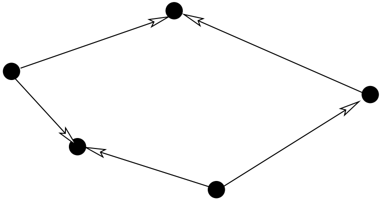
Først trenger vi noen grafbegreper.

Vei (path): sekvens $v_1, v_2, \ldots, v_t$ der $(v_i, v_{i+1})$ eller $(v_{i+1}, v_i)$ tilhører $E$ (er kant i grafen) for alle $i$. Sier at veien er mellom $v_1$ og $v_t$ (endenodene for veien). Her er et eksempel på en vei med 3 kanter (og da 4 noder):



Vi antar heretter at grafen er sammenhengende, dvs. at det finnes en vei mellom hvert par av noder.

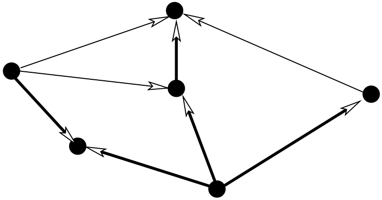
Syklus (cycle): som en vei bortsett fra at endenodene faller sammen, f.eks.



Delgraf (subgraph): ny avledet graf $D' = (V', E')$ der $V' \subseteq V$ og $E' \subseteq E$ og der hver kant i $E'$ har begge endenoder i $V'$.

Tre: en sammenhengende graf $T$ som ikke inneholder noen syklus. (Da er: Antall kanter i $T$ = antall noder $-1$).

Spenntre (spanning tree): en sammenhengende subgraf $T = (V, E')$ der $T$ ikke inneholder noen syklus; legg merke til at $T$ inneholder alle nodene i $V$ (utspennende subgraf). Her er et eksempel på en graf og et spenntre (angitt med tykkere kanter):



Det viktige for oss er nå at

1. Spenntrær svarer til LP basiser.
2. Beregninger av tilhørende basisløsninger kan gjøres ved enkle operasjoner i spenntreet.
3. Pivoteringen svarer til en enkel endring av spenntreet (til et nytt spenntre).

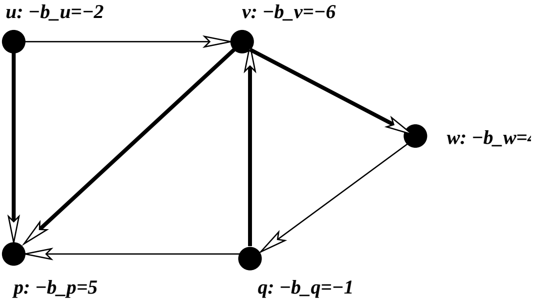
Vi bør nevne at antall spenntrær kan være svært høyt (det kommer an på grafen), men likevel får vi en effektiv metode (fordi bare noen av spenntrærne “besøkes”).

La oss først se hvordan vi beregner strømmen $x$ for et gitt spenntre $T$ i grafen.

Vi skal beregne den tilhørende såkalte treløsningen $x$.

- Vi krever at det ikke er strøm utenfor treet, dvs. $x_e = 0$ for alle $e \notin E(T)$ (her betegner $E(T)$ kantene i spenntreet $T$).
- Det viser seg at dette er nok til å bestemme alle variablene for kantene i treet entydig! Altså, alle $x_e$ for $e \in E(T)$ blir da entydig bestemt.
- Legg merke til at dette er samme fenomen vi kjenner fra generell LP: når ikkebasisvariablene er valgt, blir basisvariablene bestemt entydig.

Vi viser prinsippet ved følgende eksempel:




1. $x = 0$ utenfor $T$: $x_{uv} = x_{qp} = x_{wq} = 0$
2. Balanse i $u$, utstrøm-innstrøm=$b_u$ gir $x_{up} = 2$.
3. Balanse i $w$ gir $x_{vw} = 4$.
4. Balanse i $q$ gir $x_{qv} = 1$.
5. Balanse i $v$ gir $x_{vp} = 6 + 1 - 4 = 3$.

(Vi kunne i punkt 4 alternativt brukt balanse i node $p$.)

Det viktige var at ved å velge en smart rekkefølge på $x$-variablene, så ble beregningene enkle: i hvert tilfelle ble den nye variabelen $x_e$ bestemt av en likning der bare $x_e$ var ukjent. F.eks. i skritt 5 over ble $x_{vp}$ bestemt enkelt fordi vi kjente alle andre variable på nabokanter til node $v$.

Algoritme for beregning av $x$ for gitt $T$:

1. Velg et blad i spenntreet $T$ dvs. en node som er inntil nøyaktig én kant $e$ i $T$.
2. Beregn $x_e$ for denne kanten $e$.
3. "Fjern" $e$ fra $T$, og gå tilbake til steg 1 over inntil alle variablene er bestemt.

Det er klart at denne prosedyren virker. Her brukes at ethvert tre har minst ett blad (faktisk minst to), hvorfor?

Altså:

- Vi har en enkel og effektiv algoritme for å beregne treløsningen $x$ knyttet til et spenntre $T$.

Vårt neste prosjekt er å forklare

- hvorfor spenntrær svarer til LP basiser og
- hvordan de øvrige beregninger i en pivotering kan utføres.

Dette kommer i neste leksjon.