UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

UNDERVEISEKSAMEN I:	MAT-INF3300/4300 – PARTIELLE DIFFERENSIAL-LIGNINGER OG SOBOLEV ROM I.
EKSAMENSDAG:	MANDAG 11/10, 2004.
TID FOR EKSAMEN:	KL. 09.00–12.00.
VEDLEGG:	INGEN.
TILLATTE HJELPEMIDLER:	INGEN.

OPPGAVESETTET ER PÅ 2 SIDER.

Oppgave 1.

a) Finn den generelle løsningen $u = u(x, y)$ av differensialligningen

$$\cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

der $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ er en fiksert parameter.

b) Finn løsninger av ligningen i a) slik at

$$u(x, 0) = e^{-x^2}$$

og diskuter spesiellt for hvilke verdier av θ det er ingen, en, eller flere løsninger.

c) Finn så den generelle løsningen av differensialligningen

$$\cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta \sin x$$

ved hvilken som helst metode.

d) For hvilke verdier av $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ kan du finne en løsning u av ligningen i c) med $u(x, 0) = e^{-x^2}$, og hva er denne løsningen?

Oppgave 2. I denne oppgaven kan du regne som kjent at fundamentalløsningen $\Phi(x)$ for Laplaces ligning i to dimensjoner er $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|$.

a) Hvis $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$, skriv ned en løsning $u = u(x_1, x_2)$ av

$$-\Delta u = f \quad \text{i } \mathbb{R}^2$$

Du behøver ikke bevise at dette er en løsning.
Er løsningen entydig?

La nå U være første kvadrant i $\mathbb{R}^2$, dvs.

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0\}$$

så randen ∂U til U består av den positive x_1-aksen og den positive x_2-aksen. Vi skal finne begrensete løsninger av problemet

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } U \\ u = g & \text{for } x_2 = 0, \quad x_1 > 0 \\ u = h & \text{for } x_1 = 0, \quad x_2 > 0 \end{cases}$$

der vi antar at f, g og h er glatte funksjoner med kompakt støtte

b) Finn en korreksjons-funksjon Φ^x for dette problemet, dvs. $\Phi^x(y)$ er definert for $x \in U$ og $y \in \bar{U}$ og

$$\begin{aligned} &\Delta_y \Phi^x(y) = 0 \quad \text{for } y \in U \\ &\Phi^x(y) = \Phi(y - x) \qquad \text{for } y \in \partial U \end{aligned}$$

Du kan finne Φ^x ved å ta en lineærkombinasjon av de fire funksjonene $\Phi(y-(\pm x_1, \pm x_2))$ av $y \in \mathbb{R}^2$.
Skriv ned den lineærkombinasjonen du bruker. Skriv ned Greensfunksjonen $G(x, y)$ for dette problemet.

c) Ved å bruke representasjonsformelen for løsningen av $(*)$ ved hjelp av Greens funksjonen kan en vise at løsningen har formen

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) = &- \int_0^\infty G_1(x_1, x_2; y_1) g(y_1) dy_1 \\ &- \int_0^\infty G_2(x_1, x_2; y_2) h(y_2) dy_2 \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty f(y_1, y_2) G(x_1, x_2; y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Hva er funksjonene G_1 og G_2 uttrykt ved Greensfunksjonen G?

d) Skriv eksplisitte uttrykk for funksjonene $G_1(x_1, x_2; y_1)$, $G_2(x_1, x_2; y_2)$ og $G(x_1, x_2; y_1, y_2)$.

SLUTT