UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF3300/4300 — Partiell differensialligninger og Sobolev rom 1.
Eksamensdag:	Torsdag 13. desember, 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et begrenset domene med glatt rand. Ved bruk av Greens formler og egenskaper av harmoniske funksjoner bevis at hvis $u \in C^\infty(\bar{U})$ tilfredstiller

$$\Delta(\Delta u) = 0 \text{ på } U, \quad u|_{\partial U} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ på } \partial U,$$

da $u \equiv 0$.

Oppgave 2.

Anta $U = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$. For $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definer en funksjon u på U ved

$$u(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{for } x \leq 0, \\ x^\beta, & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

For hvilke α og β har vi $u \in W^{1,1}(U)$?

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Anta $a > 0$. Beregn spektrumet til $-\Delta = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ på $(0, a) \subset \mathbb{R}$ (med Dirichlet randbetingelse) og finn en ortonormal basis i $L^2(0, a)$ bestående av egenvektorer.

Oppgave 4.

Betrakt den åpne enhetsdisken $\mathbb{D}$ i $\mathbb{R}^2$ med rand $\mathbb{T}$. Definer funksjoner e_n, $n \geq 0$, på $\mathbb{T}$ i polarkoordinater ved

$$e_0 = 1, \quad e_{2m}(\varphi) = \cos m\varphi, \quad e_{2m-1}(\varphi) = \sin m\varphi.$$

Vi kan lett sjekke at funkjonene e_n danner et ortogonal system i $L^2(\mathbb{T})$, slik at $(e_n, e_m)_{L^2(\mathbb{T})} = 0$ for $n \neq m$, og regner ut at

$$\|e_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = 2\pi, \quad \|e_n\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \pi \quad \text{for } n \geq 1.$$

Du skal ikke sjekke dette selv. Betrakt nå funkjonene u_n, $n \geq 0$, på $\mathbb{D}$ definert ved

$$u_0 = 1, \quad u_{2m}(r, \varphi) = r^m \cos m\varphi, \quad u_{2m-1}(r, \varphi) = r^m \sin m\varphi.$$

Vis at $\{u_n\}_{n \geq 0}$ er et ortogonal system i $H^1(\mathbb{D})$ og beregn $\|u_n\|_{H^1(\mathbb{D})}$. Du kan bruke at

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

En kan vise at funksjonene u_n utspenner et tett underrom i rommet H av harmoniske funksjoner i $H^1(\mathbb{D})$. Derfor er $\{u_n / \|u_n\|_{H^1(\mathbb{D})}\}_{n \geq 0}$ en ortonormal basis i H. Du skal ikke bevise det.

Oppgave 5.

La $U \subset \mathbb{R}^n$ være et begrenset domene. La H være rommet av harmoniske funksjoner i $H^1(U)$. Betrakt den bilineære symmetriske formen B på $H^1(U)$ definert ved $-\Delta$. Forklar hvorfor det for hver $u \in H^1(U)$ eksisterer en unik $w \in H^1_0(U)$ slik at

$$B(u, v) = B(w, v) \quad \text{for alle } v \in H^1_0(U).$$

Konkluder at for hver $u \in H^1(U)$ eksisterer unike $v \in H$ og $w \in H^1_0(U)$ slik at $u = v + w$.

SLUTT