UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF3300/4300 — Partielle differensialligninger og Sobolev rom I.
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 2004.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert punkt a, b, c, d i de to oppgavene teller likt ved karaktergivingen. Oppgavene er strukturert slik at du kan svare på hvert punkt uten å ha gjort de foregående punktene så ikke kast bort tiden på et punkt hvis du blir sittende fast.

Oppgave 1.

Anta at

$$u(x, y) = u(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$$

er en to ganger kontinuerlig deriverbar løsning av differensialligningen

$$\Delta_x u = \Delta_y u$$

i $\mathbb{R}^6$, der

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

og

$$\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$$

La

$$M_1(x, y, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{|z|=1} u(x + rz, y) dS(z)$$

(Fortsettes side 2.)

være det sfæriske middelet i x-variabelen over en sfære med radius r omkring x, og tilsvarende

$$M_2(x,y,r) = \frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} u(x, y+rz)dS(z)$$

En beviser som i beviset for Euler-Poisson-Darboux ligningen at

$$\Delta_x M_1 = \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)M_1$$

(Du behøver ikke gjøre dette.)

a) Vis at M_1 tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_1) = \Delta_y(rM_1)$$

med initialbetingelsene

$$rM_1(r,x,y)\big|_{r=0} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_1(r,x,y))\big|_{r=0} = u(x,y)$$

b) Vis at

$$M_1(x,y,r) = M_2(x,y,r)$$

for alle $x, y, \in \mathbb{R}^3$, $r \in \mathbb{R}$, ved å bruke entydigheten av løsningen av initialverdiproblemet i a).

c) Hvis $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ er en løsning av den tredimensjonale bølgeligningen $\Delta_x v = v_{tt}$ så er

$$u(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = v(x_1, x_2, x_3, y_1)$$

en løsning av

$$\Delta_x u = \Delta_y u.$$

Hvorfor? Bruk dette og resultatet fra c) til å vise

$$\int_{|z|=1} v(x+rz, t)dS(z) = 2\pi\int_{-1}^{1} v(x, t+r\tau)d\tau$$

(Bruk for eksempel sylinderkoordinater med t-aksen som z-akse.)

d) Vis fra resultatet i c) at hvis $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ er en tre ganger kontinuerlig deriverbar løsning av bølgeligningen, så gjelder "rekursjonsrelasjonen"

$$v(x, t+r) = v(x, t-r) + \frac{r}{2\pi}\int_{|z|=1} v_t(x+rz, t)dS(z)$$

for alle $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$. (Hint: Vis først at v_t óg er en løsning av bølgeligningen.)

(Fortsettes side 3.)

Oppgave 2.

I denne oppgaven skal vi utlede en variant av Sobolevs ulikhet som kalles Nash's ulikhet. Hvis $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ er den Fourier transformerte av φ definert ved

$$\tilde{\varphi}(p) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ipx} \varphi(x) dx$$

for $p \in \mathbb{R}^n$, der $px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ og vi har

$$\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi\right)}(p) = ip_k \tilde{\varphi}(p)$$

og Plancherels teorem

$$\|\varphi\|_2 := \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\tilde{\varphi}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

(Du behøver ikke å vise dette.)

a) Vis at $|\tilde{\varphi}(p)| \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ og dermed at

$$\int_{B(0,r)} |\tilde{\varphi}(p)|^2 dp \leq (2\pi)^{-n} |B(0,r)| \|\varphi\|_1^2$$

der $|B(0,r)|$ er det n-dimensjonale volumet av kulen $B(0,r)$ med radius r om 0.

b) Vis at

$$\int_{|p|>r} |\tilde{\varphi}|^2 dp \leq r^{-2} \int_{|p|>r} p^2 |\tilde{\varphi}(p)|^2 dp$$

og dermed at

$$\int_{|p|>r} |\tilde{\varphi}|^2 dp \leq \frac{1}{r^2} \|D\varphi\|_2^2$$

der $D\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$ er gradienten til φ og

$$\|D\varphi\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\|_2^2$$

c) Ved å dele opp $\mathbb{R}^n$ i de to delene

$$\{p|\ |p| < r\} \quad \text{og} \quad \{p|\ |p| \geq r\},$$

vis at det finnes en konstant $k > 0$ slik at

$$\|\varphi\|_2 \leq \epsilon \|D\varphi\|_2 + \epsilon^{-n/2} k \|\varphi\|_1$$

for alle $\epsilon > 0$. Dette er Nash's første ulikhet.

d) Optimaliser ulikheten i c) med hensyn på ϵ og bruk approksimasjon til å vise at det finnes en konstant $K > 0$ slik at

$$\|\varphi\|_2 \leq K \big\|D\varphi\big\|_2^{\frac{n}{n+2}} \, \|\varphi\|_1^{\frac{2}{n+2}}$$

for alle $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$. Dette er Nash's annen ulikhet.

SLUTT