UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF4300 — Partial Differential Equations and Sobolev Spaces I
Eksamensdag:	Mandag 13. Desember 2010
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 35%)

La $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$. Vi betrakter randverdiproblemet

$$-\Delta u = c \quad \text{in } U, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 \quad \text{on } \partial U. \tag{1b}$$

1a

Vis at, hvis det finnes en løsning $u \in C^2(\bar{U})$ til randverdiproblemet (1), da må vi ha $c = -2$.

For resten av oppgaven antar vi at $c = -2$.

1b

Finn alle radialsymmetriske løsningene til (1), det vil si, de løsningene som skrives som

$$u(x, y) = v(r)$$

for $v \in C^2([0, \infty))$. Her skriver vi $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

[Hint: Bruk identiteten $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv}{dr})$.]

1c

La $B : H^1(U) \times H^1(U) \to \mathbb{R}$ være definert som

$$B(u, v) = \int_U Du \cdot Dv \, dx$$

(Fortsettes på side 2.)

og $f : H^1(U) \to \mathbb{R}$ som

$$f(v) = c \int_U v\,dx + \int_{\partial U} v\,dS.$$

Vi sier at $u \in H^1(U)$ er en svak løsning av (1) hvis

$$B(u,v) = f(v)$$

for alle $v \in H^1(U)$. Forklar denne definisjonen. Vis at f er en kontinuerlig lineær avbilding fra $H^1(U)$ til $\mathbb{R}$.

[Hint: Bruk *trace* teorem.]

1d

Vi antar at u er en svak løsning. Vis at u er nødvendigvis lik en av løsningene som ble funnet i **1b**.

Oppgave 2 (vekt 30%)

La X, Y og Z være tre Banach rom med normer $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ og $\|\cdot\|_Z$. Anta at X er kompakt embedded i Y og at Y er kontinuerlig embedded i Z.

2a

Forklar hva det betyr for to Banach rom å være *kompakt embedded* og *kontinuerlig embedded* i hverandre.

2b

Vis at, for alle $\varepsilon > 0$, det finnes en konstant $C > 0$ slik at

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C \|u\|_Z$$

for alle $u \in X$.

[Hint: Argumentér med selvmotsigelse. Lag en (sub)sekvens v_n slik at $\|v_n\|_X = 1$, v_n konvergerer i Y og $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_Z = 0$.]

2c

Gitt $p > 1$, bruk det forrige resultatet og vis at, for alle $\varepsilon > 0$, det finnes en konstant $C > 0$ slik at

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \varepsilon \|Du\|_{L^p(0,1)} + C \|u\|_{L^1(0,1)}$$

for alle $u \in W^{1,p}(0,1)$.

[Hint: Bruk $W^{1,p}(0,1) \subset\subset L^\infty(0,1)$.]

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 (vekt 35%)

La $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$. Vi betrakter den følgende lineære differensielloperatoren

$$Lu = -(5 + x)u_{xx} + (x^2 + y^2 - 5)u_{yy}$$

og randverdiproblemet

$$Lu = f \quad \text{in } U, \tag{2a}$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial U, \tag{2b}$$

der $f \in L^2(U)$ er gitt. La $B : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbb{R}$ være den bilineære formen gitt ved

$$B(u, v) = \int_U ((5 + x)u_x v_x - (x^2 + y^2 - 5)u_y v_y + u_x v - 2y u_y v)\, dx.$$

Vi sier at $u \in H_0^1$ er en svak løsning til (2) hvis

$$B(u, v) = \int_U f v\, dv \tag{3}$$

for alle $v \in H_0^1$.

3a

Forklar definisjonen (3) av svake løsninger.

3b

Vis at differentielloperatoren L er elliptisk i U.

3c

Vis at den bilineære formen B tilfredstiller

$$B(u, u) \geq \frac{5}{2} \|Du\|_{L^2}^2 - \frac{3}{2} \|u\|_{L^2}^2$$

for alle $u \in H_0^1$.

3d

Vis at det finnes en entydig svak løsning $u \in H_0^1$ til (2).

[Hint: Bruk Lax-Milgram og Poincarés ulikhet: $\|u\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{2} \|Du\|_{L^2(U)}$ for alle $u \in H_0^1$.]

SLUTT