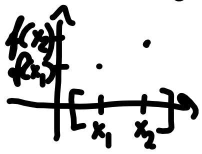
FORKURS MAT0011
Fredag 11. august 2022

FUNKSJONSDRØFTING

DEF: En funksjon f vokser / er voksende på et intervall I hvis for alle $x_1, x_2 \in I$ og $x_1 < x_2$ så $f(x_1) \leq f(x_2)$



$<$ strengt voksende

OBS: Konstante funksjoner er voksende OG avtagende

Tilsvarende for avtagende funksjonene

RESULTAT:

Hvis f er (1) kontinuerlig på $[a, b]$ og (2) $f'(x) \geq 0$ for $x \in (a, b)$, så er f voksende på $[a, b]$.

Tilsvarende (≤ 0) for avtagende.

MAKS- OG MINPUNKTER

Kandidater:

1. Punkter c der $f'(c) = 0$
2. Punkter c der $f'(c)$ ikke er definert
3. Endepunktene a, b hvis vi er på $[a, b]$

RESULTAT

Hvis f er (1) kontinuerlig og (2) $f'(x)$ skifter fortegn i c, så er c et maks/min.

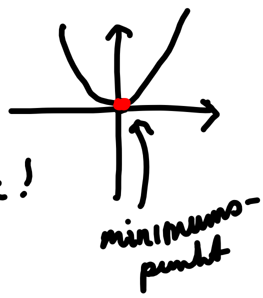
EKS: $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$, kandidat $x = 0$

2x ----0———

Skifter fortegn OK!

Så $(0,0)$ er et bunnpunkt

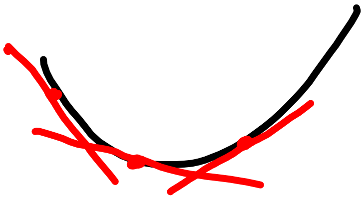


EKS: $f(x) = x^3$

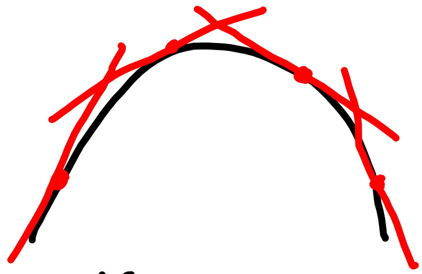
$f'(x) = 3x^2$, kandidat $x = 0$

$3x^2$ ———0———

KRUMNING



- $f''(x) \geq 0$
  f' voksende
  f konveks



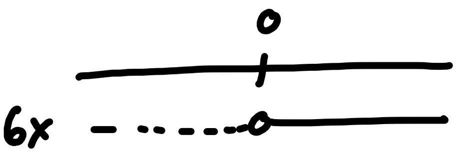
- $f''(x) \leq 0$
  f' avtagende
  f konkav

- Hvis ① $f''(c) = 0$ og ② $f''(x)$ skifter fortegn så er c et <u>vendepunkt</u>

EKS: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$, kandidat $x = 0$



så $(0,0)$ er et vendepunkt for f.

EKS: $f(x) = \frac{1}{4-x^2} = (4-x^2)^{-1}$ rasjonal funksjon

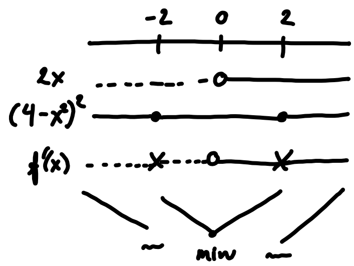
- Nullpunkter? $f(x) = 0$

$$\frac{1}{4-x^2} = 0 \quad \text{umulig}$$

Så f har ingen nullpunkter.

- Kandidater for maks og min:
  - $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
  - $f'(x) = -1 \cdot (4-x^2)^{-2} \cdot (-2x)$

$$= \frac{2x}{(4-x^2)^2}$$



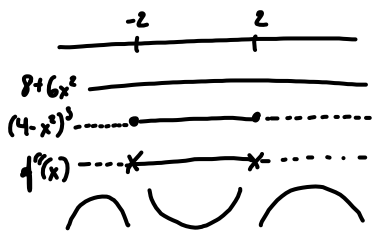
$x = 0$ gir minimum.

- $f''(x) = \frac{2\cdot(4-x^2)^{\cancel{2}} - 2x \cdot 2\cancel{(4-x^2)}\cdot(-2x)}{(4-x^2)^{\cancel{4}\,3}}$

$$= \frac{8 - 2x^2 + 8x^2}{(4-x^2)^3}$$

$$= \frac{8 + 6x^2}{(4-x^2)^3}$$

$f''(x) = 0$ er umulig!

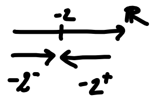


- Asymptoter
  - Horisontale $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0$

    Samme for $x \to -\infty$

    $y = 0$ er horisontal asymptote

  - Vertikale kandidater -2 og 2



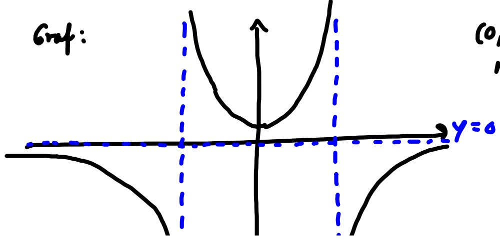
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{4-x^2} = \infty$$

Tilsvarende for 2.

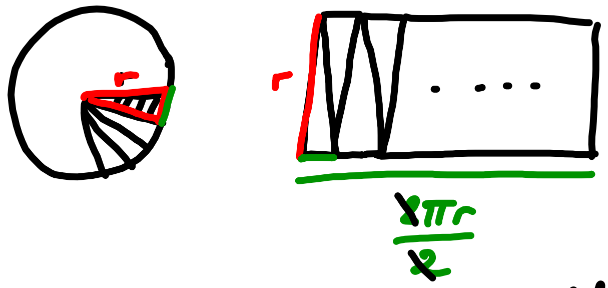
$x = -2$ og $x = 2$ er vertikale asymptoter

Graf:



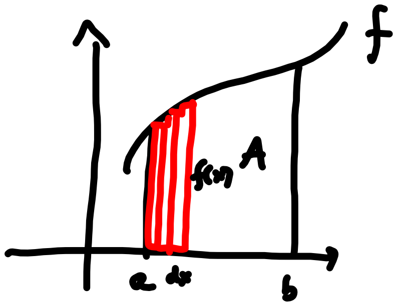
$(0, \frac{1}{4})$ er minimum

KAP 9 - INTEGRASJON



$$A = \pi \cdot r^2$$

INTEGRASJON: Summerer uendelig mange uendelig små størrelser.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

a, b kalles grenser
$f(x)$ kalles integrand
dx kalles differensialet til x

DET BESTEMTE INTEGRALET

$\int_a^b f(x)\,dx$ er et tall

$$= K(b) - K(a)$$

Analysens fundamentalteorem

der K er en funksjon der $K' = f$
K kalles antiderivert til f.

EKS: $f(x) = x$ $\quad F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$

Mengden antiderivete til f: $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

DET UBESTEMTE INTEGRALET

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \underline{C}\,,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{(integrasjonskonstant)}$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C\,,\ C \in \mathbb{R}$$

ANTIDERIVASJONSREGLER

$a \in \mathbb{R}$

- $\int a\,dx = ax + C$

$r \in \mathbb{R}$, $\boxed{r \neq -1}$

- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$

- $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$$\boxed{(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}}$$

- $\int e^x dx = e^x + C$

$a > 0$

- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

$-$

- $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$+$

- $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

FLERE REGLER

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

$k \in \mathbb{R}$

- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

EKS: $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

EKS: $\int 4x^2 + \cos x\, dx = 4 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \sin x + C$

EKS: $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$

$$= -x^{-1} + C$$

$$= -\frac{1}{x} + C$$

PRODUKTREGEL BAKLENGS

$u(x) = u$

$v(x) = v$

$(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$

$$\int (u\cdot v)'\,dx = \int u'v\,dx + \boxed{\int u\cdot v'\,dx}$$

$$\int (u\cdot v)'\,dx = u\cdot v$$

$$\boxed{\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx}$$

Delvis integrasjon

EKS: $\int x \ln x \, dx$

$= \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + C$

$u = x \quad u' = 1$

$v' = \ln x \quad v = ?$ } ikke så smart

$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \quad v = \frac{1}{2}x^2$

EKS: $\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx$

$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$

$= x\ln x - x + C$

$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$

$v' = 1 \quad v = x$

KJERNEREGEL BAKLENGS
SUBSTITUSJON

EKS:

$$\int 2\sin(2x)\,dx$$
$$= \int 2\sin u \cdot \tfrac{1}{2}\,du$$
$$= \int \sin u\,du$$
$$= -\cos u + C$$
$$= -\cos 2x + C$$

SUBST.

$u = 2x$

$\frac{du}{dx} = 2$

" $du = 2dx$ "

$\frac{1}{2}du = dx$

EKS:

$$\int x e^{x^2}\,dx$$
$$= \int e^{u} \cdot \tfrac{1}{2}\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{u} + C$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

SJEKK! (derivere!)

EKS:

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$
$$= \int \sin u \cdot 2u\,du$$
$$= -2u\cos u - \int 2(-\cos u)\,du$$
$$= -2u\cos u + 2\sin u + C$$
$$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

SUBST

$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u}\,dx$

$2u\,du = dx$

DELVIS INT.

$s = 2u \qquad s' = 2$

$t' = \sin u \qquad t = -\cos u$

DELBRØKSOPPSPALTNING

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q er polynomer

$\uparrow$ Rasjonal funksjon

- Hvis grad $P(x) \geq$ grad $Q(x)$: POLYNOMDIVISJON
- Hvis grad $P(x) < Q(x)$: DELBRØKSOPPSPALTNING

$$\frac{A}{x-r}, \quad \frac{B}{(x-r)^n} \quad \left[\frac{C_1x+D_1}{x^2+bx+c}, \frac{C_2x+D_2}{(x^2+bx+c)^m}\right]$$

MAT1100

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-r}\,dx = A\ln|x-r| + C$

$$\overset{\text{u}}{=} \int \frac{A}{u}\,du = A\ln|u| + C$$

SUBST
$u = x-r$
$du = dx$

- $\displaystyle\int \frac{B}{(x-r)^n}\,dx = \int B\cdot(x-r)^{-n}\,dx$

$$= \int B\,u^{-n}\,du$$

$$= \frac{B}{-n+1}u^{-n+1} + C$$

$$= \frac{B}{1-n}(x-r)^{1-n} + C$$

EKS: $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x-1)(x+3)}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{\frac{7}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{9}{4}}{x+3}\,dx$

TIDLIGERE

$$= \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{9}{4}\ln|x+3| + C$$

EKS: $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

TIDLIGERE

$$= \ln|x-1| + (-1)\frac{1}{(x-1)} + C$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$