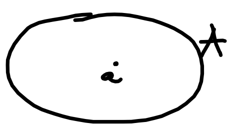
Velkommen til oppfriskning i matematikk!

Spørsmål? Admin: studieinfo@math.uio.no
Paul, kontor 7. etasje Niels Henrik Abels hus
Christian, — " — 11. — " —

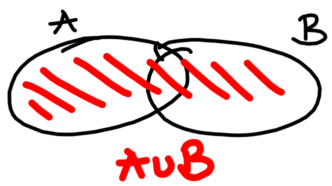
Kap. 1: Litt om notasjon, mengder og logikk:

En mengde er en samling av objekter.

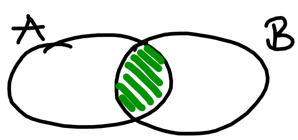
La A være en mengde.
La a være et element i A.
Vi skriver: $a \in A$
element i



La A og B være to mengder.
Mengden av elementene som er i A eller i B: $A \cup B$
union

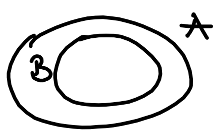


Mengden av elementene som er i A og i B: $A \cap B$
snitt

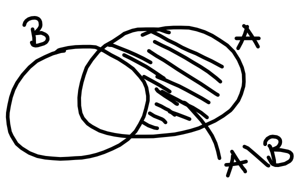


La B være en delmengde av A:

$B \subseteq A$
inneholdt i eller lik



Mengdeminus: $A \setminus B$ eller $A - B$



$\emptyset$: den tomme mengden

Tallmengder:

$\{1,2,3,\dots\}$: de naturlige tallene $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}\cup\{0\}$

De hele tallene: $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

$2x = 1$

De rasjonale tallene: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0 \right\}$

(:) betingelse kommer "slik at"

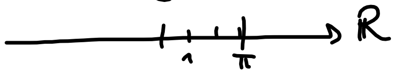
$\frac{a}{b}$: en brøk

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ er en brøk, men $\frac{\sqrt{2}}{2}\notin\mathbb{Q}$

$\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$

$\sqrt{2},\pi,e,\sqrt{3},\dots \notin\mathbb{Q}$

De reelle tallene: $\mathbb{R}$ (MAT1100)



Et tall: et reelt tall.

$x^2+1=0$

$x^2=-1$

trenger komplekse tall $\mathbb{C}$ (MAT1100, stat)

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_0\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

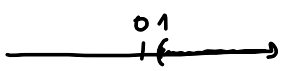
eks. $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} = \{\dots,-2,-1,0\}$

$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$

$\mathbb{Z}\cap(0,5) = \{1,2,3,4\}$ $(0,5)=\langle 0,5\rangle$

$(1,\infty) = \{x\in\mathbb{R} \mid x>1\}$

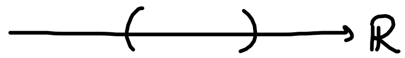
intervallnotasjon mengdenotasjon



pause til 10^{25}

Intervaller

(en type tallmengde: en bit av tallinja)



begrensede

- $[1,2]$: lukket intervall (endepunktene er med)
- $(1,2) = \langle 1,2 \rangle$: åpent intervall (endepunktene er ikke med)
- $[1,2)$: halvåpent

ubegrensede

- $[1, \rightarrow\rangle = [1,\infty)$ lukket — ∞: symbol, ikke et tall
- $\langle \leftarrow, 1] = (-\infty, 1]$
- $(1,\infty)$ åpent
- $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ både lukket og åpent
- $\emptyset$ — " —

Kap. 2: Kvadratsetningene og andregradsuttrykk

La $a, b \in \mathbb{R}$.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ 1. kvadratsetning

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2. — " —

$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$ Konjugatsetningen

Anvendelser:

Regne ut: $(4u-v)^2 = (4u)^2 - 2 \cdot 4u \cdot v + v^2 = 16u^2 - 8uv + v^2$

Faktorisere: $\underbrace{4x^2}_{(2x)^2} + 4x + \underbrace{1}_{1^2} = (2x+1)^2 \leftarrow$

Fullføre kvadratet: å skrive et andregradsuttrykk som ikke er et fullstendig kvadrat som et fullstendig kvadrat + rest

eks. $x^2 + 18x$

$\to = \underbrace{x^2 + 18x + \underbrace{81 - 81}_{=0}}$

$= (x+9)^2 \underbrace{- 81}_{\text{rest}}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$x^2 + 18x$

$x = a$: $a^2 + 18a$

$a^2 + 2 \cdot 9 \cdot a$

$b = 9$: $\underbrace{a^2 + 2 \cdot 9 \cdot a + 9^2}_{(a+9)^2} - 9^2$

Løse likninger:

Løse likninger:

eks. $x^2 - 4x - 32 = 0$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 - 32 = 0$$

$$(x-2)^2 - 36 = 0$$

Alt. 1

$(x-2)^2 = 36$

$x - 2 = \pm\sqrt{36}$

$x - 2 = \pm 6$

$x - 2 = 6 \lor x - 2 = -6$

$\underline{\underline{x = 8 \lor x = -4}}$

Alt. 2

$(x-2)^2 - 6^2 = 0$

$a^2 - b^2$

$(x-2-6)(x-2+6) = 0$

$(x-8)(x+4) = 0$

$x - 8 = 0 \lor x + 4 = 0$

$\underline{\underline{x = 8 \lor x = -4}}$

2. gradslikning:

$$\underline{ax^2 + bx + c = 0}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

abc-formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

kan utledes ved å følge metoden i eksemplet ovenfor

delta

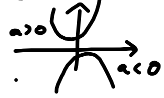
$b^2 - 4ac = \Delta$: diskriminanten til likningen

$b^2 - 4ac > 0$: to løsninger

$b^2 - 4ac = 0$: én løsning (fullstendig kvadrat)

$b^2 - 4ac < 0$: ingen reell løsning (men komplekse løsninger!)

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ingen reell løsning



To løsninger r og s:

$$ax^2 + bx + c = a(x-r)(x-s)$$

pause til 11^{20}

Kap. 1 Logikk

Utsagn: en påstand som er sann eller usann

De fleste matematiske utsagn er implikasjoner.

Dvs. de er på formen " hvis p så q "

(p impliserer/medfører q)

Vi skriver: $p \Rightarrow q$

eks. $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ (er sant)

$x^2 = 1 \not\Rightarrow x = 1$ (er ikke sant)

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \lor x = -1$ $(x = \pm 1)$ (er sant)

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \lor x = -1$ (er sant)

ekvivalens

eks. $\sqrt{x+2} = x - 4$

$\Downarrow$

$x + 2 = (x-4)^2$ (kvadrerer)

$x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 14 = 0$

$x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \dfrac{9 \pm 5}{2} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$

Sette prøve: $\underline{\underline{x = 7}}$ ok $(3 = 3)$

$x = 2$ $2 = -2$ ikke ok

Løsning: $\underline{\underline{x = 7}}$

$\sqrt{4} = 2$

$-\sqrt{4} = -2$

$\pm\sqrt{4}$

eks. Argumentasjon:

Hvis n er et naturlig tall

så er $n^2 \geq n$.

Vi kan skrive: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \geq n$.

Bevis: (direkte)

Anta at $n \in \mathbb{N}$.

Da har vi $n \geq 1$.

Siden $n > 0$ har vi også

$n^2 \geq n$. ∎

Induksjonsbevis
Motsigelsesbevis
Direkte bevis
Kontrapositivt bevis

Kladd: $n \in \mathbb{N}$

$n \geq 1$

$n^2 \geq 1$ $\sqrt{n}$ $\sqrt{1}$

$n \cdot n \geq 1 \cdot n$ $(n > 0)$

$n^2 \geq n$

Induksjonsbevis: (eget ark)

Anta at for hver $n \in \mathbb{N}$ så har vi et utsagn P_n.

Anta videre at vi har oppfylt:

1) P_1 er sann

2) Hvis P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$ så er P_{k+1} sann.

Da er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

---

eks. P_n: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 \geq n$

P_1: $1^2 \geq 1$ ok

Anta at P_k er sann, dvs. $k^2 \geq k$ for en $k \in \mathbb{N}$

Vi vil vise at da er P_{k+1} sann, dvs. $(k+1)^2 \geq k+1$.

Vi har:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \geq k + 2k + 1 \quad \text{(bruker antakelsen)}$$
$$= 3k + 1$$
$$> k + 1 \quad (3k > k,\ k \in \mathbb{N})$$

Så P_n er sann for alle $n \in \mathbb{N}$ ved induksjon.

Kap. 2 Potenser (imorgen), men gjør gjerne opg. i dag.