MAT0011 tirsdag 9. august

studieinfo@math.uio.no

Kap. 2 Potenser

La $a \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}} = a^n \quad \text{potens}$$

n: eksponenten
a: grunntallet

Kan bruke induksjon til å vise følgende regneregler ($m, n \in \mathbb{N}$):

P1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (m > n,\ a \neq 0)$

P3 $(a^m)^n = a^{mn}$

I går: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

a^r ? når $r \in \mathbb{R}$?

Utvider potensbegrepet slik at eksponenten kan være i $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$. Vi gjør dette slik at potensreglene gjelder.

a^0 ? $\quad a^n \cdot a^0 \overset{P1}{=} a^{n+0} = a^n$

Vi definerer $\boxed{a^0 = 1}$

a^{-n} ? $\quad a^n \cdot \underline{a^{-n}} \overset{P1}{=} a^{n-n} = a^0 = 1$

Vi definerer $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , a \neq 0}$

$a^{\frac{1}{n}}$?

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \overset{P3}{=} a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

dvs. $a^{\frac{1}{n}}$ er et tall slik at når vi opphøyer tallet i n, får vi a. Dvs. vi kan si at $a^{\frac{1}{n}}$ er en løsning av likningen $\underline{x^n = a}$.

Et slikt tall kalles en n-te rot av a.

Vi definerer: $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$

"roten av 4" $= 2$

"minus roten av 4" $= -2$

"røttene til 4" $= \pm 2$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

der $\sqrt[n]{a} = \begin{cases} \text{den (unike) løsningen av } x^n = a \text{ når } n \text{ oddetall} \\ \text{den positive løsningen av } x^n = a \text{ når } n \text{ partall og } a \geq 0 \end{cases}$

Vi definerer ikke $\sqrt[n]{a}$ når $a<0$ og n er et partall. $(\sqrt{-2})$

eks. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = \underline{\underline{-2}}$ $\qquad x^3 = -8$, $x = -2$

eks. $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}$ $\qquad x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$

$a^{\frac{m}{n}}$?

$a^{\frac{m}{n}} \underset{P3}{=} (a^m)^{\frac{1}{n}} \underset{P3}{=} (a^{\frac{1}{n}})^m$

$= \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

kan vise at disse er like

Vi definerer: $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$

eks. $a \neq 0$

$\left(\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^4 = \left(\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^4 = (a^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}})^4 = (a^{-\frac{3}{6}})^4 = (a^{-\frac{1}{2}})^4$

$= a^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{a^2}}}$ $\qquad$ f.eks. $(a=2)$

Reelle eksponenter:

$a^r, r \in \mathbb{R}$?

2^π ? $\approx 8{,}825$

π: 3, $3{,}1$, $3{,}14$, $3{,}141$, $3{,}1415$, ...

$\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \ldots \xrightarrow{\text{konvergerer}} \pi$

$2^{\frac{3}{1}}, 2^{\frac{31}{10}}, 2^{\frac{314}{100}}, 2^{\frac{3141}{1000}}, \ldots \xrightarrow{\text{konv. mot}} 2^\pi$

Overgang $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$: konvergens

Vi kan definere a^r, $r \in \mathbb{R}$, $\underline{a>0}$:

Potensreglene gjelder fortsatt!

Hvis $a, b > 0$: $\boxed{a^r b^r = (ab)^r}$

eks. $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

Logaritmer: (nært knyttet til potenser)

Løse eksponentallikninger

$10^x = 100$

$x = 2$

$\longrightarrow 5^x = 100$ $\qquad 2 < x < 3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 5^2 \quad 5^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 25 \quad 125$

$x = \log_5 100$

Definisjon: La $a \neq 1$, $a, b > 0$.
Tallet vi må opphøye a i for å få b kalles logaritmen til b med a som grunntall.
Vi skriver: $\log_a b$. Dvs. $a^{\log_a b} = b$.

To viktige grunntall:

10 og e

~~pause til 10^{30}~~

$$e = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\in \mathbb{Q}} \qquad e \approx 2{,}718281828\ldots\ldots$$

$$e \notin \mathbb{Q}$$

$\log_{10} = \lg$

$\log_e = \ln$ den naturlige logaritmen

$$\boxed{e^{\ln a} = a}$$

Potensreglene for e ($r, s \in \mathbb{R}$):

P1 $e^r \cdot e^s = e^{r+s}$

P2 $\dfrac{e^r}{e^s} = e^{r-s}$

P3 $(e^r)^s = e^{rs}$

Logaritmereglene for ln ($b, c > 0$):

L1 $\ln(bc) = \ln b + \ln c$

L2 $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln b - \ln c$

L3 $\ln b^c = c \ln b \qquad (c \in \mathbb{R})$

Bevis for L1: Sjekke at $e^{\ln b + \ln c} = bc$ (siden $\ln(bc)$ er det tallet vi må opphøye e i for å få bc).

$$e^{\ln b + \ln c} \underset{P1}{=} e^{\ln b} \cdot e^{\ln c} = b \cdot c \,. \quad \blacksquare$$

eks. $5^x = 100$

$x = \log_5 100$

$5^x = 100$

$\ln 5^x = \ln 100$

$x \ln 5 = \ln 100$

$x = \dfrac{\ln 100}{\ln 5} \approx 2{,}861$

eks. $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$

$(e^x)^2 + 5e^x + 6 = 0$

$e^x = u$

$u^2 + 5u + 6 = 0$

$$u = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

$u = -2 \lor u = -3$

$e^x = -2 \lor e^x = -3$

Ingen løsning.

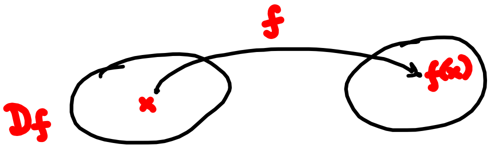
- $e^x > 0$ for alle x
- $\ln x$ er definert for $x > 0$

Kap. 3 Funksjoner

Hva er en funksjon?

En funksjon f er en regel som til hvert element x i en mengde D_f gir/tilordner ett, og bare ett, element $f(x)$ i en annen mengde.

" En funksjon: en maskin "



NB!

f er funksjonen

$f(x)$: verdien til x under f (funksjonsverdien)

D_f : definisjonsmengden

V_f : verdimengden

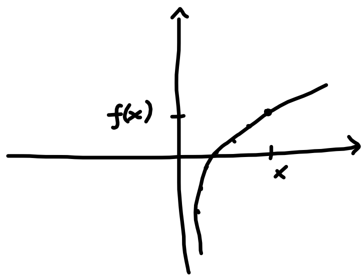
$$V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$$

En funksjon er ofte gitt ved en formel: $f(x) = \dots$

D_f : alle verdiene til x som gir mening til formelen.

Grafen til en funksjon:

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in D_f \}$$

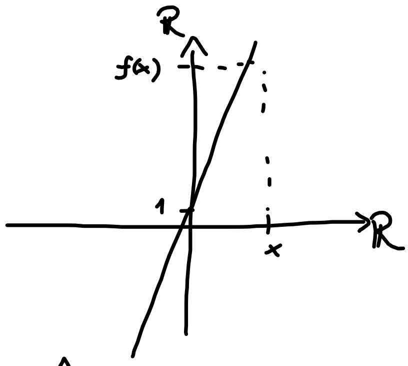


eks.

$f(x) = 4x + 1$ lineær funksjon

$D_f = \mathbb{R}$

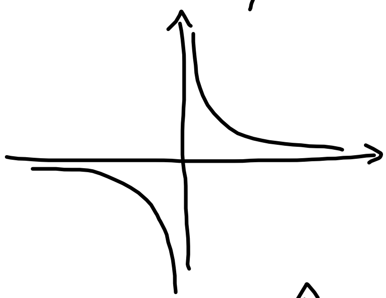
$V_f = \mathbb{R}$



eks. $g(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

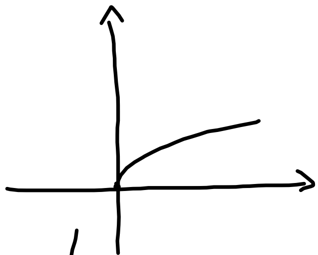
$V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



eks. $h(x) = \sqrt{x}$

$D_f = [0, \infty)$

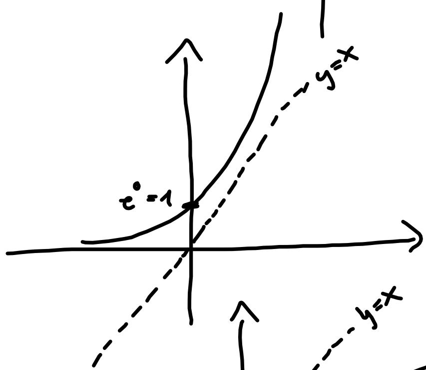
$V_f = [0, \infty)$



eks. $f(x) = e^x$

$D_f = \mathbb{R}$

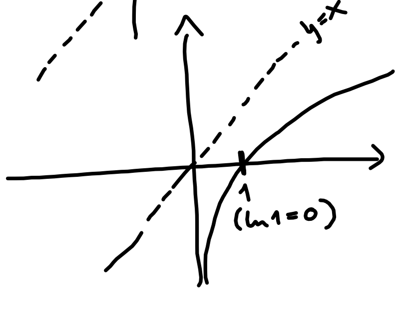
$V_f = (0, \infty)$



eks. $g(x) = \ln x$

$D_f = (0, \infty)$

$V_f = \mathbb{R}$



pause til 11^{27}

Kan "lage" funksjoner:

La f og g være funksjoner.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{"f ring g"}$$

(ny notasjon)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{"g ring f"}$$

eks. $f(x) = x^2 + 1$

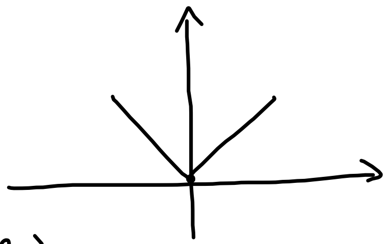
$g(x) = e^x$

$$(f \circ g)(x) = (e^x)^2 + 1 = \underline{e^{2x} + 1}$$
$$(g \circ f)(x) = \underline{e^{x^2+1}}$$

Absoluttverdifunksjonen:

$f(x) = |x|$

der $|x| = \begin{cases} x & \text{når } x \geq 0 \\ -x & \text{når } x < 0 \end{cases}$



en funksjon med delt forskrift
(funksjonsuttrykket skifter på ulike intervaller)

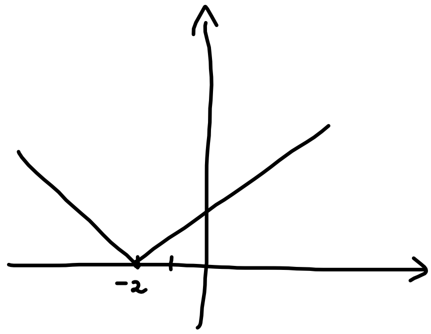
0 kalles et bruddpunkt

$D_f = \mathbb{R}$

$V_f = [0, \infty)$

eks. $g(x) = |x+2|$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{når } x+2 \geq 0, \text{ dvs. } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{når } x+2 < 0, \text{ dvs. } x < -2 \end{cases}$$



Kap. 4 Polynomer og rasjonale uttrykk

Definisjon: Et polynom i x av grad n ($n \in \mathbb{N}_0$) er et uttrykk på formen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

der $a_n \neq 0$.

Tallene $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ kalles koeffisientene til polynomet, og er reelle tall.

Konstanter er polynomer av grad 0.

eks. $2x^2 - \pi$

polynom av grad 2 ($a_2 = 2, a_1 = 0, a_0 = -\pi$)

En polynomfunksjon: " $f(x) =$ polynom "

eks. $f(x) = 2x^2 - \pi$

polynomfunksjon av grad 2

(andregradsfunksjon)

Et rasjonalt uttrykk: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ der $P(x)$ og $Q(x)$ er polynomer.

En rasjonal funksjon : " $f(x) =$ rasjonalt uttrykk "

eks. Rasjonale funksjoner

$f(x) = 4x - 1$ $\qquad \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$

Ikke rasjonale funksjoner

e^x $\qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\ln x$ $\qquad \cos^{\sin x} x$

To nyttige teknikker for å håndtere rasjonale funksjoner:

1) Polynomdivisjon
2) Delbrøkoppspalting

Polynomdivisjon: Gitt $P(x)$ og $Q(x)$ to polynomer, graden til $P(x) \geq$ graden til $Q(x)$.
Det fins to polynomer $S(x)$ og $R(x)$ slik at

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

der graden til $R(x) <$ graden til $Q(x)$.

---

eks.

$$\overbrace{(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)}^{P(x)} : \overbrace{(x^2 - 5x + 6)}^{Q(x)} = \underbrace{x - 1}_{S(x)}$$

$$\begin{array}{l}
-(x^3 - 5x^2 + 6x) \\
\hline
\quad -x^2 + 5x - 6 \\
\quad -(-x^2 + 5x - 6) \\
\hline
\qquad\qquad 0 \quad R(x)
\end{array}$$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \underline{(x^2 - 5x + 6)(x - 1)}$ faktorisering

Når vi får rest 0 ser vi at $P(x)$ er delelig med $Q(x)$.

Nullpunktsetningen

La $a \in \mathbb{R}$.
Divisjonen $P(x) : (x - a)$ gir rest 0

$$\Updownarrow$$

$$P(a) = 0$$

eks. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$P(1) = 0$
så $P(x)$ er delelig med $x - 1$.