MAT0011 torsdag 11. august

Kap. 6 Grenseverdier

Grunnleggende begrep for å analysere funksjoner

eks. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ rasjonal funksjon

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Hva skjer med $f(x)$ når $x=-2$?

$f(-2{,}0001) = -4{,}0001$

$f(-1{,}999) = -3{,}999$

Def. Grenseverdien til $f(x)$ når x går mot a er lik b hvis vi kan få $f(x)$ så nær b vi vil ved å velge x nær nok a, men ikke lik a. Vi skriver: $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

MAT1100: en formell definisjon

eks. $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

$\lim_{x\to -2} f(x) = -4$

Vi regner slik:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-2) = \underline{\underline{-4}}$$

kan forkorte ($x+2 \neq 0$)

Regneregler:
Hvis $\lim_{x\to a} f(x) = A$ og $\lim_{x\to a} g(x) = B$
så har vi

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

bevis i MAT1100

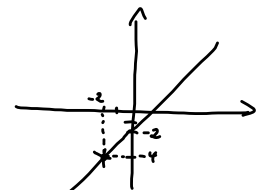
Tre tilfeller:

1) b er et tall : grenseverdien eksisterer

2) $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$: grenseverdien eksisterer ikke, men vi oppgir $\pm\infty$ som svar

3) grenseverdien eksisterer ikke, f.eks. $\lim_{x\to\infty} \sin x$

eks. $\frac{x^2-4}{x+2} = x-2$ når $x \neq -2$



graf for $y=x-2$ der vi fjerner $(-2,-4)$

Definisjon: Funksjonen f er kontinuerlig i punktet $a \in D_f$ hvis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En funksjon er kontinuerlig hvis den er kont. i alle punktene i def. mengden.

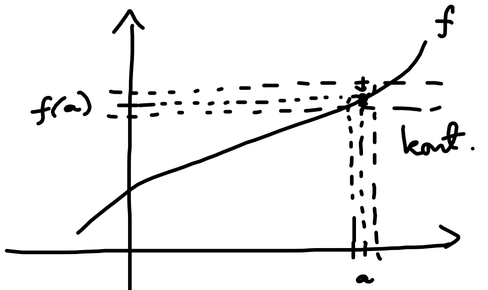
"Alle kjente funksjoner er kontinuerlige"

f. eks. lineære, rasjonale, trigonometriske, logaritme-, eksponential-, potens- funksjoner er kont.

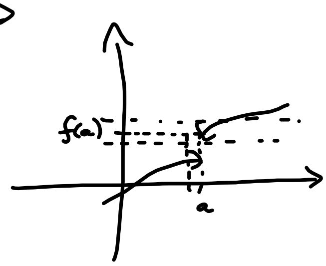
Sum, differanse, produkt, kvotient, sammensetning ($f \circ g$, $g \circ f$) av kont. funksjoner er kont.

her er det en del å bevise!

Illustrasjon:



(når $a \in D_f$ kan vi regne ut / finne $f(a)$)



Å regne med grenseverdier:

1) Bruke kontinuitet:

$$\lim_{x\to 1} \underbrace{\left(e^x + \sqrt{3}x + \sin x\right)}_{\text{uttrykket til en kont. funksjon}} = e^1 + \sqrt{3}\cdot 1 + \sin 1 = \underline{\underline{e + \sqrt{3} + \sin 1}}$$

2) Bruke $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (oppgave)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(8x)}{8x} = \lim_{u\to 0} \frac{2\sin u}{u}$$

$u = 8x$
$x \to 0$
$u \to 0$

$$= 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$$

3) Forenkle uttrykket:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} (x+3) = \underline{\underline{6}}$$

4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

Konjugatsetn.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

pause til 10^{30}

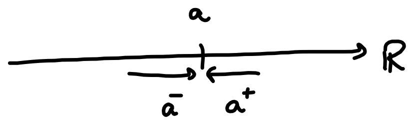
5) Dele med høyeste potens av x
($x \to \infty$ i rasjonale uttrykk)

utnytter $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

eks.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \underline{\underline{1}}$$

eks.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1} \overset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

Ensidige grenser:

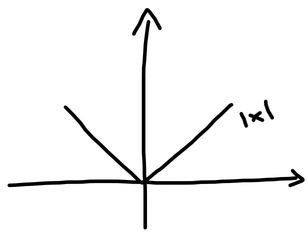


$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ eksisterer } \iff \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ og } \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ eksisterer}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

eks.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{når } x \geq 0 \\ -x & \text{når } x < 0 \end{cases}$$



Vis at f er kont. i 0 (knekkpunktet):

Må vise at $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

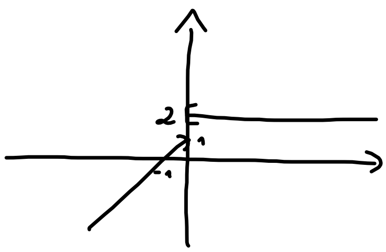
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

så $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

så f er kont. i 0.

eks.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$



Vis at f ikke er kont. i 0.

Må sjekke om $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$.

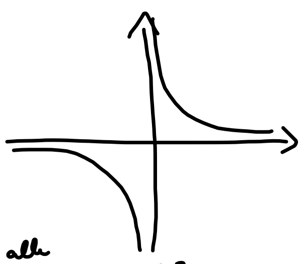
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 1$$

siden de ensidige grensene er ulike, så eksisterer ikke $\lim_{x\to 0} f(x)$, så får ikke oppfylt $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

så f er ikke kont. i 0

eks. $f(x) = \frac{1}{x}$

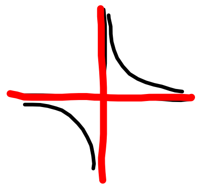


Er f kont.?

Ja. Kont. i alle punktene i $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Asymptoter:

("en linje som $f(x)$ nærmer seg")



Horisontale:

Hvis $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ så er $y = a$ en horisontal asymptote for f når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$.

eks. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$ (fra i stad)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

$y = 1$ er en horisontal asymptote

Vertikale: Kandidater:

- punkter b der $f(x)$ ikke er definert
- randpunkter b

Hvis $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ så er $x = b$ en vertikal asymptote for f.

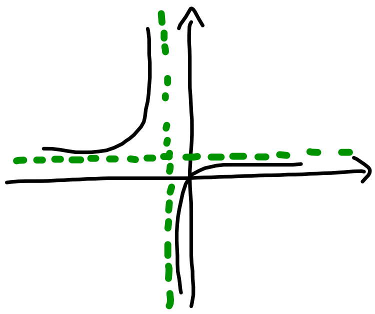
(husk ensidige grenser)

eks. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ Kandidat: $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \infty$ ("teller -1, nevner 0^-")

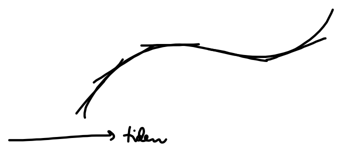
$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$ ("teller -1, nevner 0^+")

$x = -1$ er vertikal asymptote

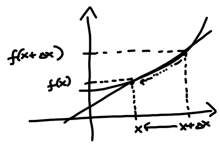


Kap. 7. Derivasjon

Studerer forandring / endring



følge st. tallet til tangenten



St. tallet til sekanten

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x}$$

gj. snittlig velocitet

Hvis $\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$ eksisterer så sier vi at f er **deriverbar** i x. Vi skriver $f'(x)$ for grenseverdien.

momentan velocitet

pause til 11^{28}

Notasjon:

$f'(x)$	Lagrange
$\frac{df}{dx}$	Leibniz
$D[\dots]$	Euler
$\dot{f}(t)$	Newton

Derivasjonsregler (kan utledes fra definisjon):

$a' = 0 \quad , a \in \mathbb{R}$

$(x^r)' = rx^{r-1} \quad , r \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad , a > 0$

$(e^x)' = e^x$

$y' = y$

$(\sin x)' = \cos x$

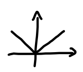
$(\cos x)' = -\sin x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad . \; x > 0$

$(|x|)' = \frac{|x|}{x}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$= \frac{|x|}{x}$ ikke deriverbar i 0

$$= \begin{cases} \frac{x}{x}, & x > 0 \\ \frac{-x}{x}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Flere regler:

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregelen:
$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Kvotientregelen:
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Kjerneregelen:
$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

eks. $(\ln(x^2+1))' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

eks. $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

eks. $(e^{2x})' = 2e^{2x}$

eks. $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$

eks. $(x^2 + \cos x)' = 2x - \sin x$

eks. $(x^2 \sin(\ln x))' = x^2 \cdot (\sin(\ln x))' + 2x \cdot \sin(\ln x)$

$= x^2 \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + 2x \sin(\ln x)$

$= x\cos(\ln x) + 2x\sin(\ln x)$

Kap. 8

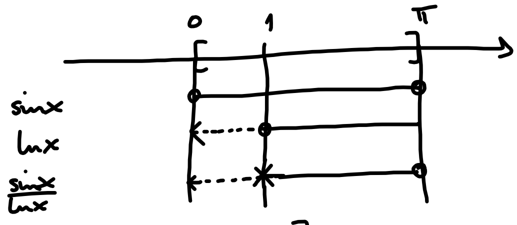
Funksjonsdrøfting

– skaffe nok info til å skissere grafen

- Finne nullpunkter
- Finne maks/min, vendepunkter
- Asymptoter

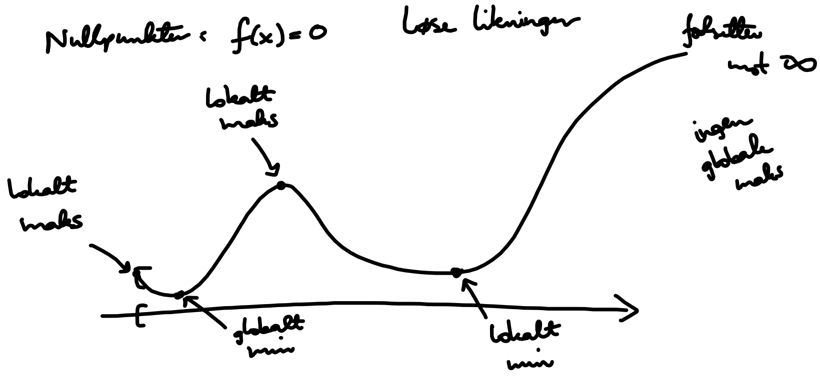
Fortegnsskjema:

eks. $\frac{\sin x}{\ln x}$, $[0,\pi]$ fortegn?



Positivt på $\langle 1,\pi]$
Negativt på $\langle 0,1\rangle$

Nullpunkter: $f(x)=0$ Løse likninger



Mer funksjonsdrøfting i morgen
(gjør gjerne noen oppgaver i dag hvis tid)