MAT0011 - Oppfriskning i matematikk

Induksjonsbevis

Inger Christin Borge

Induksjonsbevis brukes til å vise at et utsagn P_n er sant for alle $n \in \mathbb{N}$:

Hvis vi kan vise at 1 P_1 er sann og 2 hvis P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$ så er også P_{k+1} sann så sier induksjonsprinsippet at P_n er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Merk at det kan hende at utsagnet ikke er sant for $n = 1$, men bare sant for større verdier av n. La $m \in \mathbb{N}$. Vi kan vise at et utsagn P_n er sant for $n \geq m$ ved å starte induksjonen (punkt 1) på m istedenfor 1 og anta at $k \geq m$ i punkt 2.

Oppgaver: Bevis at følgende utsagn er sanne og tenk over hvordan vi kan komme fram til disse utsagnene.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \in \mathbb{N}$

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\ n \in \mathbb{N}$

4. $3^n > n^2,\ n \in \mathbb{N}$

5. $n! > 2^n,\ n \geq 4$

6. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1},\ x \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

P.S. Det vil ganske sikkert dukke opp anledninger der disse utsagnene kan komme til nytte!